

Fonction polynôme du second degré.

1) Définition

On appelle fonction **polynôme de degré 2** ou fonction **trinôme** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ réels et } a \neq 0.$$

L'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la forme développée de f .

Les réels a, b et c sont les **coefficients** de la fonction f .

Exemples :

- Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$$

f est une fonction polynôme avec $a = 3$; $b = -5$ et $c = 2$

- Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2$$

g est une fonction polynôme avec $a = 1$; $b = 0$ et $c = 0$

- Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 4x$$

h n'est pas une fonction polynôme car $a = 0$, h est une fonction affine.

2) Racines d'un polynôme

Soit f une fonction polynôme du second degré. Les racines du polynôme si elles existent sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exemples :

Exemple 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 3x$

f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 9$; $b = 3$ et $c = 0$

$f(x) = 0$ si et seulement si $9x^2 + 3x = 0$ on factorise $9x^2 + 3x$, le facteur commun est $3x$

si et seulement si $3x(3x + 1) = 0$

si et seulement si $x = 0$ ou $3x + 1 = 0$

si et seulement si $x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{0; -\frac{1}{3}\right\}$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 0 et $-\frac{1}{3}$, ce qui veut dire que

0 et $-\frac{1}{3}$ sont les racines de $9x^2 + 3x$

Exemple 2 : g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 2x + 1$

g est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$ $b = -2$ et $c = 1$

$g(x) = 0$ si et seulement si $x^2 - 2x + 1 = 0$ nous reconnaissons une identité remarquable à factoriser

si et seulement si $(x - 1)^2 = 0$

si et seulement si $x - 1 = 0$

si et seulement si $x = 1$

$S = \{1\}$, ce qui veut dire que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$, on dit que **1 est la racine double de $x^2 - 2x + 1$.**

Exemple 3 : h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 3$

h est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$ $b = 0$ et $c = 3$

$h(x) = 0$ si et seulement si $x^2 + 3 = 0$

si et seulement si $x^2 + 3 = 0$

si et seulement si $x^2 = -3$

Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

ce qui veut dire que $x^2 - 2x + 1$ **n'a pas de racine**.

3) Etude du signe d'un polynôme de degré 2

Exemple 1 et méthode :

Soit $f(x) = (x + 1)^2 + (x - 4)(x + 1)$

1) On factorise $f(x)$:

$$f(x) = (x + 1)^2 + (x - 4)(x + 1) = (x + 1)[(x + 1) + (x - 4)] = (x + 1)(2x - 3)$$

L'expression factorisée de f est : $f(x) = (x + 1)(2x - 3)$

2) On détermine les racines de $f(x)$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ ou } 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

Les racines de f sont -1 et $\frac{3}{2}$

3) On fait le tableau de signe en étudiant le signe de chaque facteur :

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$2x - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) = (x + 1)(2x - 3)$	$+$	0	$-$	$+$

Exemple 2 et méthode :

Soit $f(x) = x^2 - 10x + 25$

1) On factorise $f(x)$:

$f(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$ on remarque c'est une identité remarquable.

L'expression factorisée de f est : $f(x) = (x - 5)^2$

2) On détermine les racines de $f(x)$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

La racine de $f(x)$ est 5

3) On fait le tableau de signe en étudiant le signe de chaque facteur :

On sait qu'un carré est toujours un nombre positif dans $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$(x - 5)^2$	$+$	0	$+$

4) Factorisation d'un polynôme

Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) ayant deux racines distinctes x_1 et x_2 . Alors f peut s'écrire sous forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemples :

Exemple 1 : Soit f une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont 2 et 5 tel que $f(0) = 20$. Déterminez l'expression factorisée de f

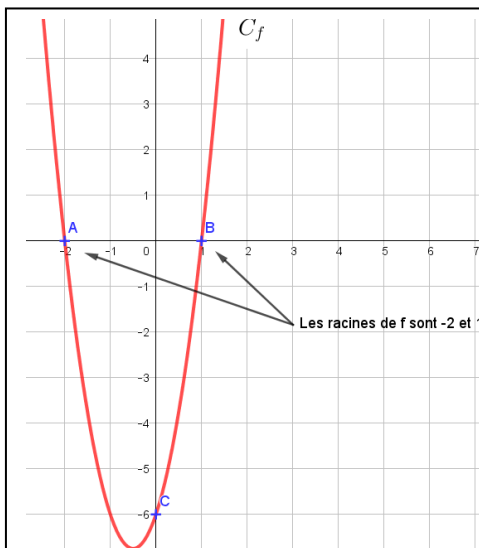
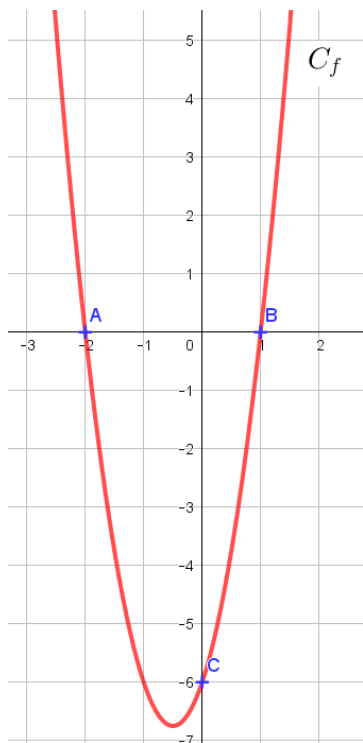
f une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont 2 et 5 alors une expression factorisée de f est : $f(x) = a(x - 2)(x - 5)$ $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Si de plus nous voulons que $f(0) = 20$ alors il suffit de remplacer x par 0 dans l'expression $f(x) = a(x - 2)(x - 5)$, $f(0) = a(0 - 2)(0 - 5) = 10a$

$$10a = 20 \text{ donc } a = \frac{20}{10} = 2$$

L'expression factorisée de f est : $f(x) = 2(x - 2)(x - 5)$

Exemple 2 : Déterminez l'expression factorisée de f dont la représentation graphique est ci-dessous :



Par lecture graphique, les racines de f sont -2 et 1 alors une expression factorisée de f est :

$$f(x) = a(x + 2)(x - 1) \quad a \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$

De plus le point $C(0; -6) \in C_f$ donc $f(0) = -6$

On remplace x par 0 dans l'expression $f(x) = a(x + 2)(x - 1)$

$$f(0) = -2a = -6$$

Donc $a = 3$ et la forme factorisée de f est :

$$f(x) = 3(x + 2)(x - 1)$$

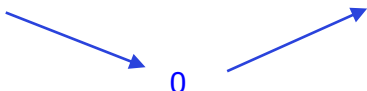
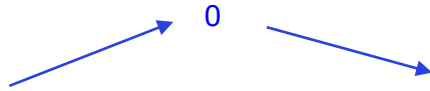
5) Propriété

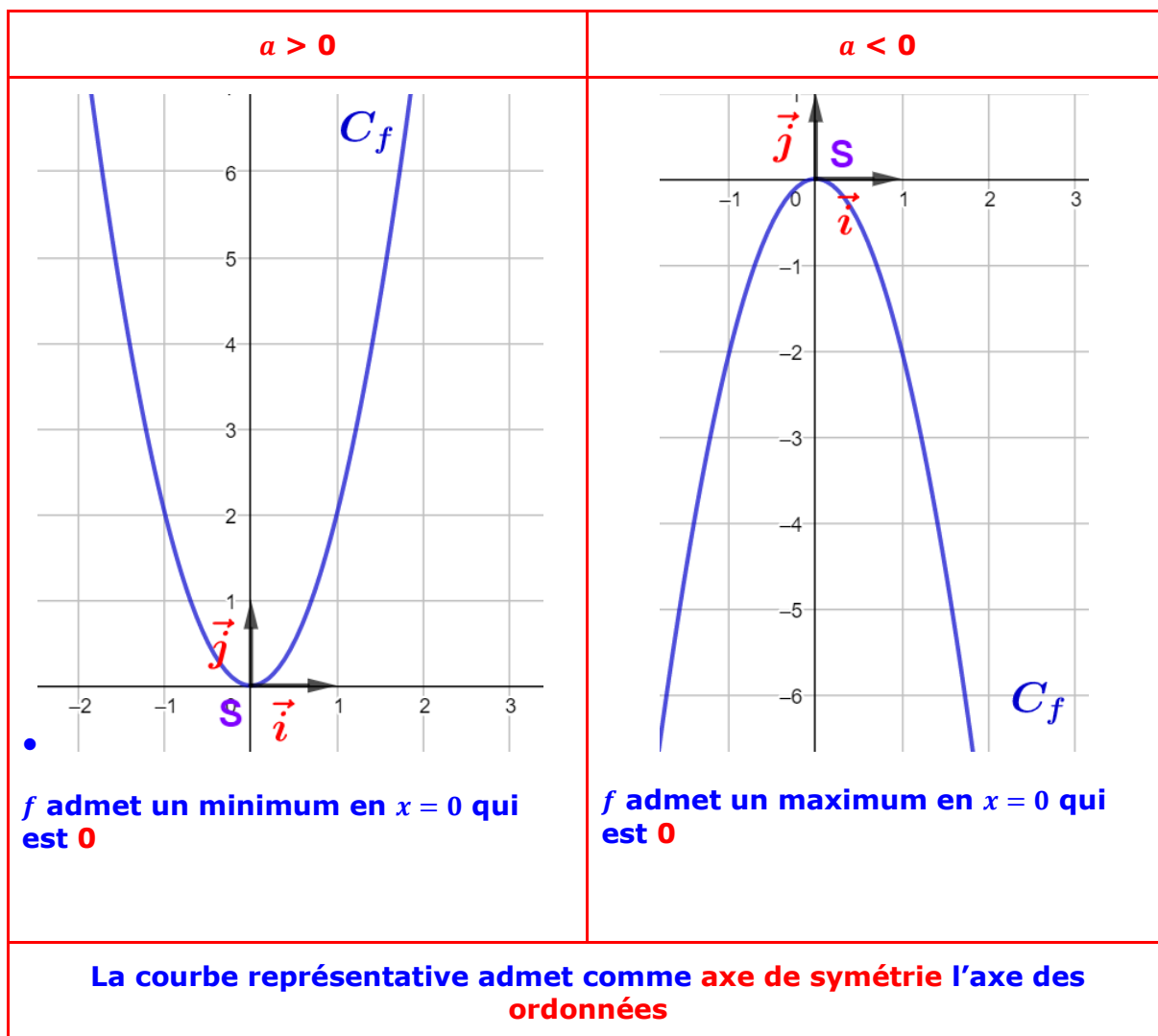
La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole** de sommet **S**.

II) Les fonctions du type ax^2

Propriété

La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax^2$ est une **parabole** de sommet **S(0 ; 0)**, le tableau de variation dépend du signe de a :

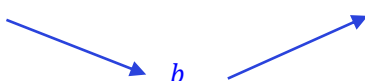
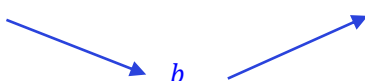
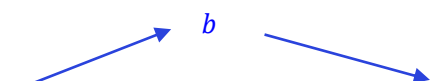
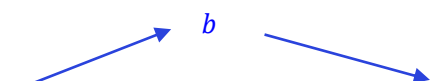
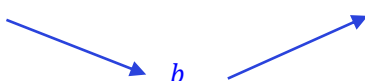
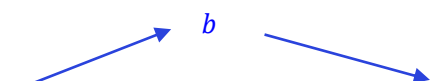
$a > 0$			$a < 0$				
f est décroissante sur $] - \infty ; 0]$ f est croissante sur $] 0 ; + \infty]$			f est croissante sur $] - \infty ; 0]$ f est décroissante sur $] 0 ; + \infty]$				
x	$-\infty$	0	$+\infty$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$				$f(x)$			

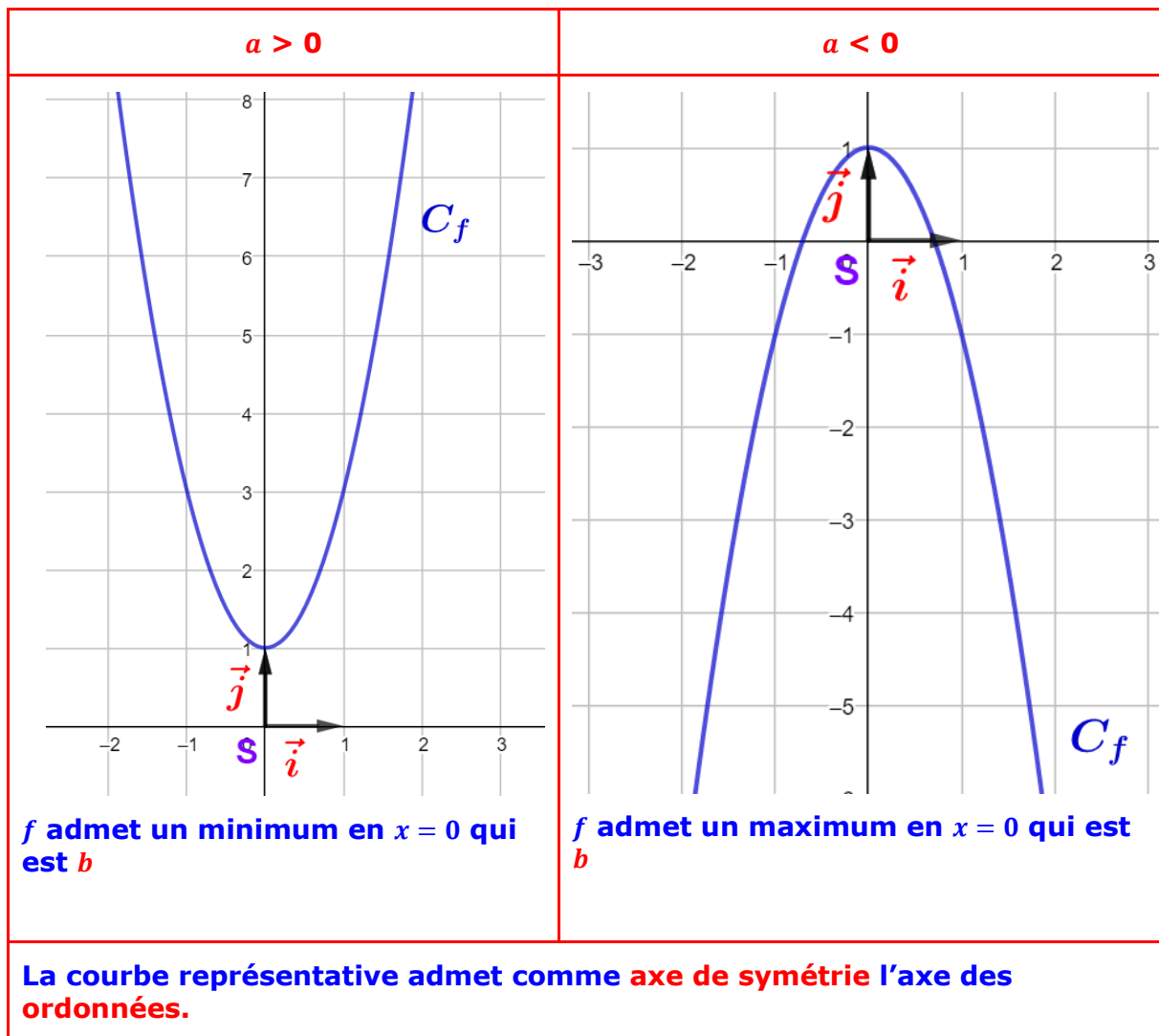


III) Les fonctions du type $ax^2 + b$

1) Propriété 1

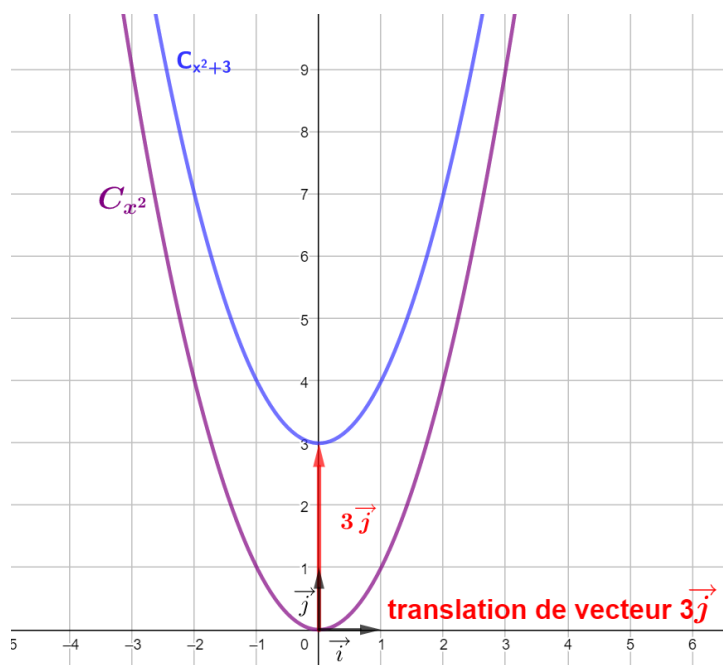
La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + b$ est une **parabole** de sommet **S(0 ; b)**, le tableau de variation dépend du signe de a :

$a > 0$	$a < 0$																
f est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ f est croissante sur $] 0 ; +\infty]$	f est croissante sur $] -\infty ; 0]$ f est décroissante sur $] 0 ; +\infty]$																
<table style="margin: auto;"><tr><td style="padding: 5px;">x</td><td style="padding: 5px;">$-\infty$</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">$+\infty$</td></tr><tr><td style="padding: 5px;">$f(x)$</td><td colspan="3" style="text-align: center;"></td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x)$				<table style="margin: auto;"><tr><td style="padding: 5px;">x</td><td style="padding: 5px;">$-\infty$</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">$+\infty$</td></tr><tr><td style="padding: 5px;">$f(x)$</td><td colspan="3" style="text-align: center;"></td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x)$			
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$f(x)$																	
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$f(x)$																	



1) Propriété 2

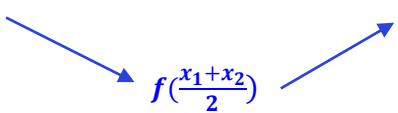
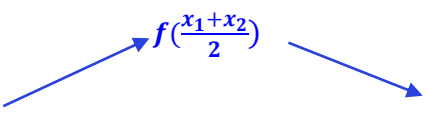
La représentation graphique est l'image de celle de la fonction $f(x) = ax^2$ par la **translation** de vecteur $b\vec{j}$.

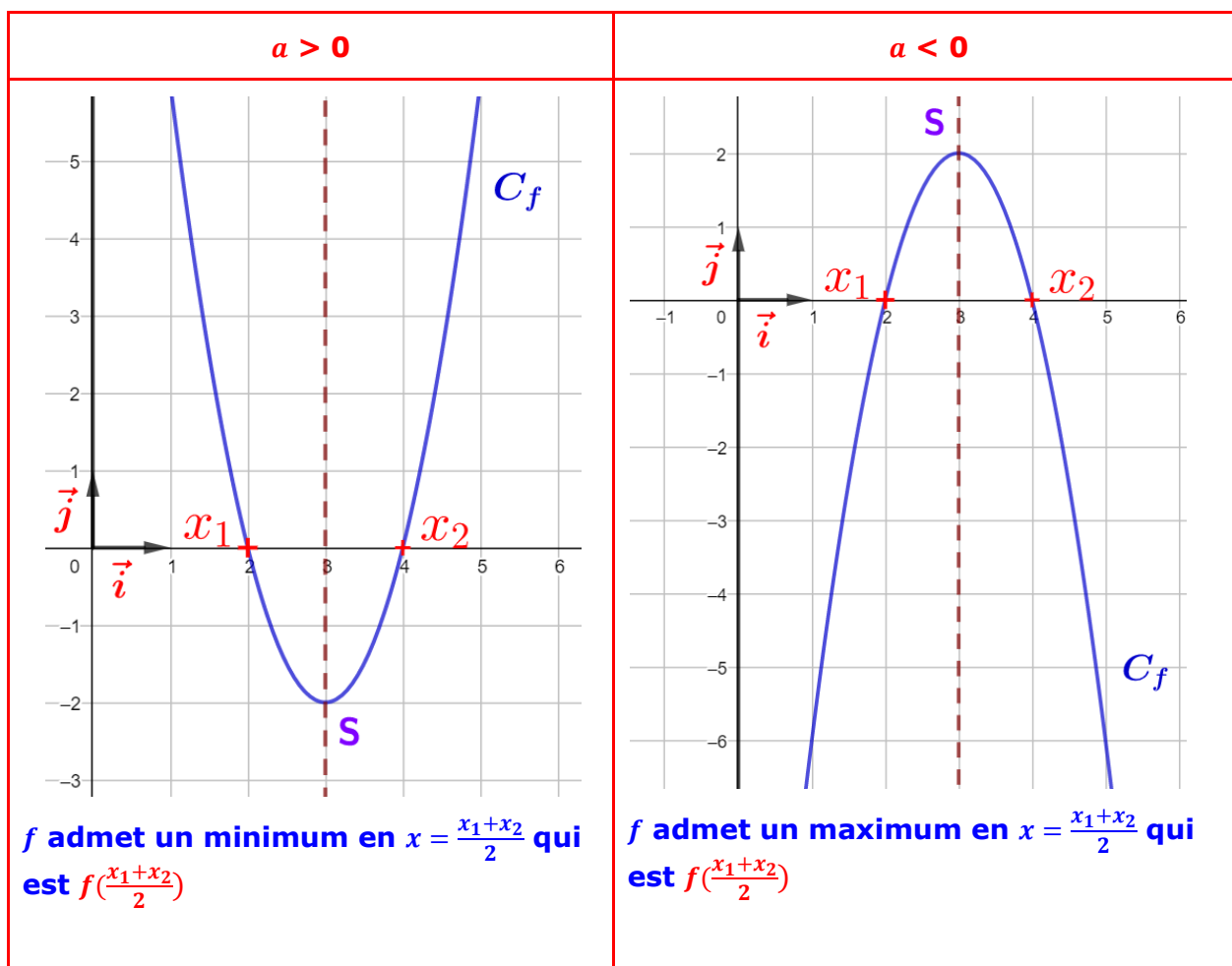


La courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 + 3$ est identiquement la même courbe que celle de $x \mapsto x^2$, elle est juste « montée de $3\vec{j}$ (3 carreaux vers le haut)».

Autre exemple :
La courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 2$ est identiquement la même courbe que celle de $x \mapsto x^2$, elle est juste « descendu de $2\vec{j}$ (2 carreaux vers le bas à cause du signe -)».

IV) Les fonctions du type $a(x - x_1)(x - x_2)$

$a > 0$		$a < 0$	
f est décroissante sur $] -\infty ; \frac{x_1+x_2}{2}]$ f est croissante sur $]\frac{x_1+x_2}{2} ; +\infty]$		f est croissante sur $] -\infty ; \frac{x_1+x_2}{2}]$ f est décroissante sur $]\frac{x_1+x_2}{2} ; +\infty]$	
x	$-\infty \quad \frac{x_1+x_2}{2} \quad +\infty$	x	$-\infty \quad \frac{x_1+x_2}{2} \quad +\infty$
$f(x)$		$f(x)$	

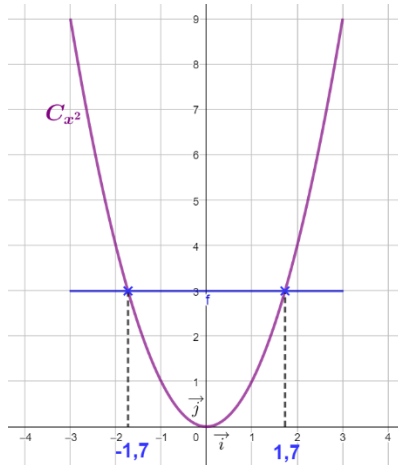


V) Exemples d'application méthode

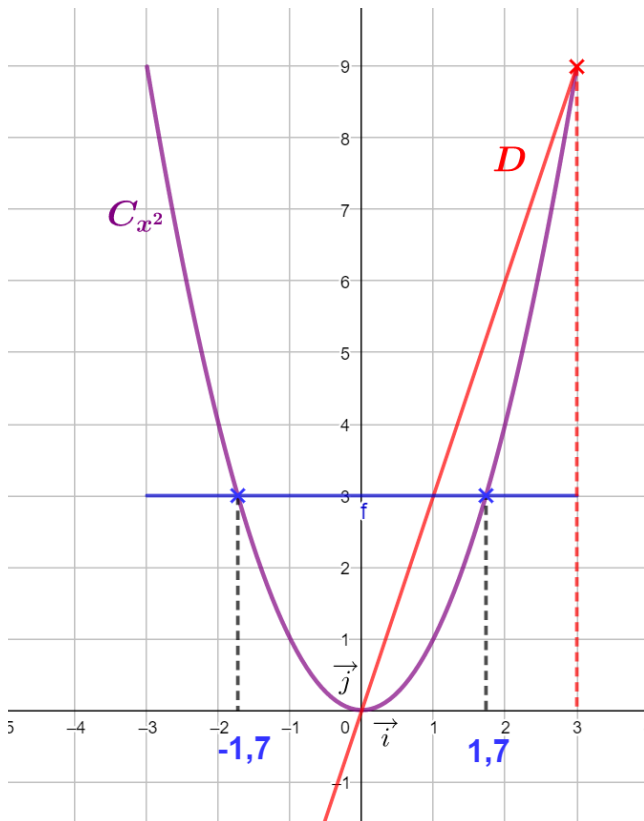
Exemple 1

1. Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3 ; 3]$ par $f: x \mapsto x^2$
2. Résoudre graphiquement les solutions de l'équation $x^2 = 3$ sur $[-3 ; 3]$
3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3x$
4. En déduire graphiquement les solutions de l'équation $x^2 - 3x = 0$ lorsque x varie dans $[-3 ; 3]$
5. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 3x < 0$

1.



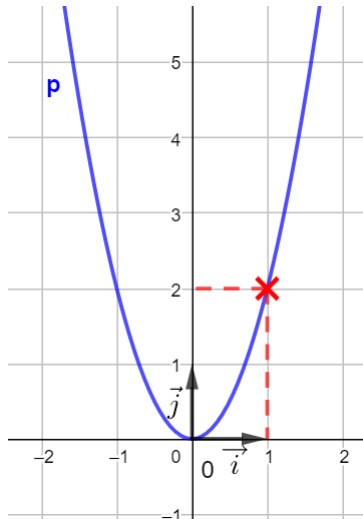
2. Graphiquement, l'unité étant le centimètre, les solutions de l'équation $x^2 = 3$ sur $[-3 ; 3]$ sont : $S = \{-1,7 ; 1,7\}$, au centimètre près.



4. Graphiquement la solution de l'équation $x^2 - 3x = 0$ lorsque x varie dans $[-3 ; 3]$, revient à résoudre l'équation $x^2 = 3x$, on recherche donc le point d'intersection entre la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction x^2 et de la droite $\mathcal{D}$ $x^2 = 3x$. Il y a 2 points d'intersection sur la figure ci-contre qui ont pour coordonnées $(0 ; 0)$ et $(3 ; 9)$. Les solutions (qui sont les abscisses) sont : $S = \{0 ; 3\}$

5. Trouver l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 3x < 0$ sur $[-3 ; 3]$ revient à résoudre l'inéquation $x^2 < 3x$ sur $[-3 ; 3]$: « x^2 plus petit que $3x$ » : veut dire que la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite $\mathcal{D}$ et graphiquement $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{D}$ sur $[0 ; 3]$.
Donc $S = [0 ; 3]$

Exemple 2 Déterminer graphiquement l'expression de la fonction f représentée ci-dessous :

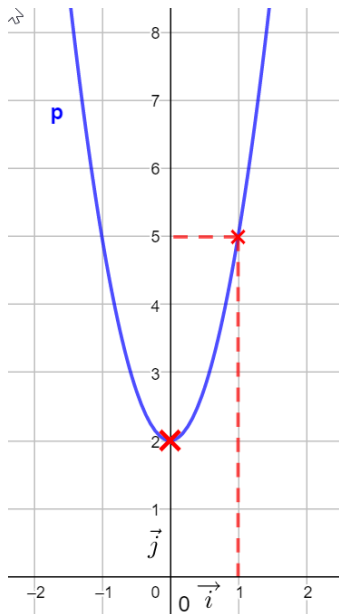


La courbe passe par 0 donc elle est de la forme : $f: x \mapsto ax^2$ de plus $f(1) = 2$ donc $a = 2$

La fonction f représenté ci-contre est :

$$f(x) = 2x^2$$

Exemple 3 Déterminer graphiquement l'expression de la fonction f représentée ci-dessous :



La courbe ne passe pas par 0 mais son axe de symétrie est l'axe des ordonnées elle est donc de la forme : $f: x \mapsto ax^2 + b$

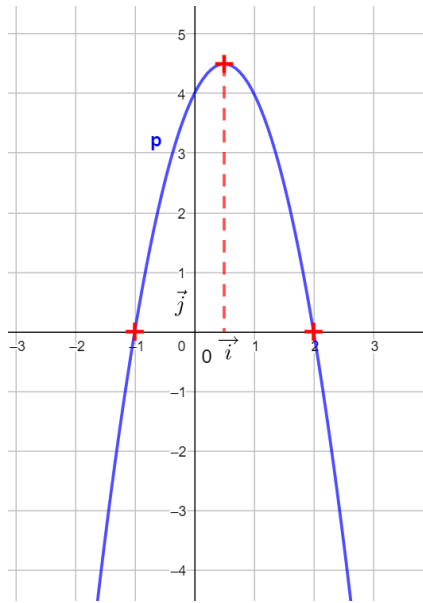
Le sommet de la parabole est $S(0 ; 2)$ donc $b = 2$

De plus $f(1) = 5 = a \times 1^2 + 2$

$5 = a + 2$ donc $a = 5 - 2 = 3$

Donc la courbe représentative est celle de la fonction : $f(x) = 3x^2 + 2$

Exemple 4 Déterminer graphiquement l'expression de la fonction f représentée ci-dessous :



La courbe ne passe pas par 0 et son axe de symétrie n'est pas l'axe des ordonnées

f est de la forme $f: x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

Graphiquement on voit que $x_1 = -1$ et que $x_2 = 2$ ce qui correspond à l'axe de

symétrie : $y = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$

Donc $f(x) = a(x + 1)(x - 2)$

Déterminons a : Le sommet de la parabole est $S(0,5 ; 4,5)$.

Donc $f(0,5) = a(0,5 + 1)(0,5 - 2) = 4,5$

$$1,5 \times (-1,5)a = 4,5$$

$$a = -\frac{4,5}{1,5 \times 1,5} = -\frac{4,5}{1,5 \times 1,5} = -2$$

Donc $f(x) = -2(x + 1)(x - 2)$