Fonction polynôme du troisième degré.

I) Définition

On appelle fonction polynôme de degré 3 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b , c et d réels et $a \neq 0$.

L'expression $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est la forme développée de f.

Les réels a, b , c et d sont les coefficients de la fonction f.

Exemples :

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto 3x^3 - 5x^2 + 2$

f est une fonction polynôme de degré 3 avec $a = 3$; $b = -5$; $c = 0$ et $d = 2$

- Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto x^3$

g est une fonction polynôme de degré 3 avec $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$ et $d = 0$

- Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto 4x$

h n'est pas une fonction polynôme de degré 3 car $a = 0$, h est une fonction affine.

II) Les fonctions du type ax^3

Propriété 1

le tableau de variation ainsi que les variations des fonctions du type ax^3 dépendent du signe de a :

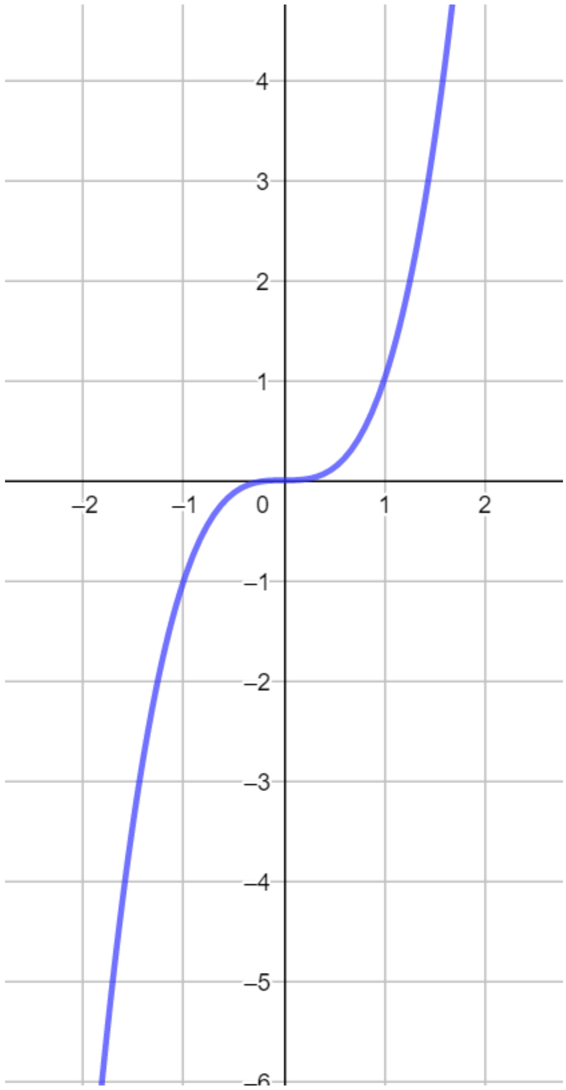
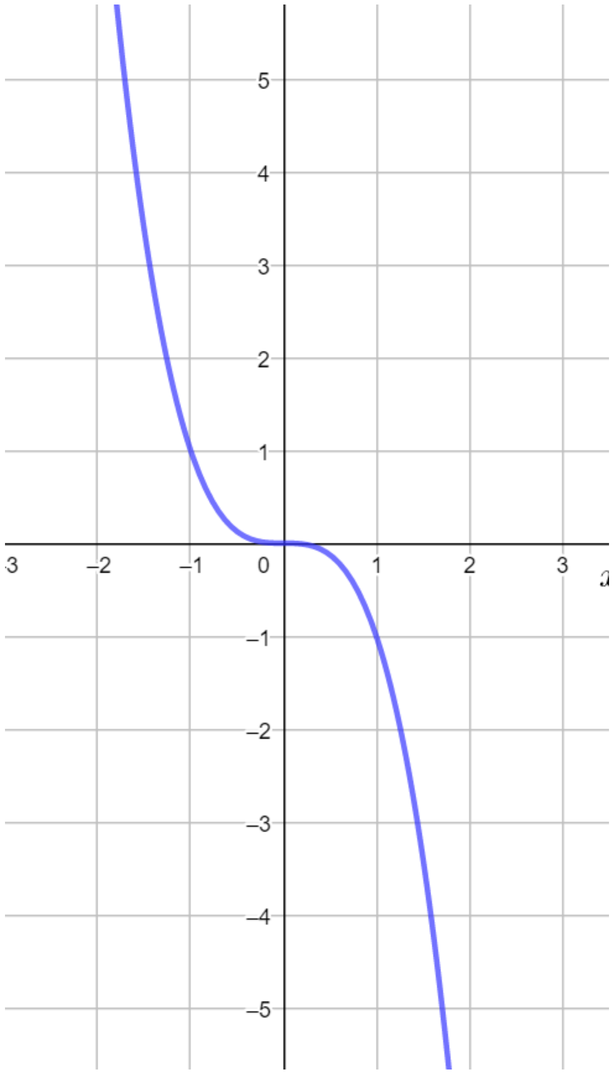
$a > 0$	$a < 0$
f est croissante sur $\mathbb{R}$	**f est décroissante sur $\mathbb{R}$**

$a > 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	↗

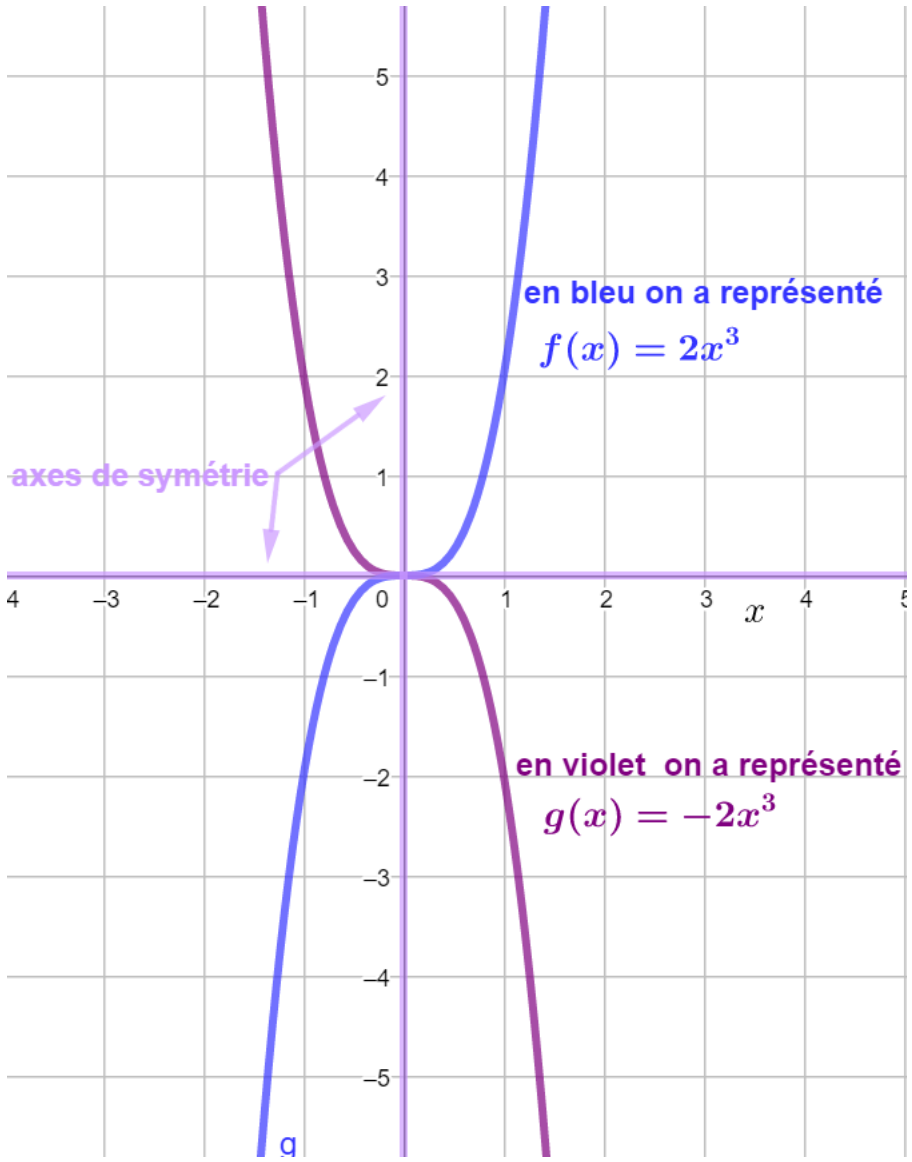
$a < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	↘

<table>
<tr><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">**La courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère**</td></tr>
</table>

Propriété 2

Pour chaque valeur de a non nul, les représentations graphiques des fonctions $f : x \longmapsto ax^3$ et $g : x \longmapsto -ax^3$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées



III) Les fonctions du type $ax^3 + b$

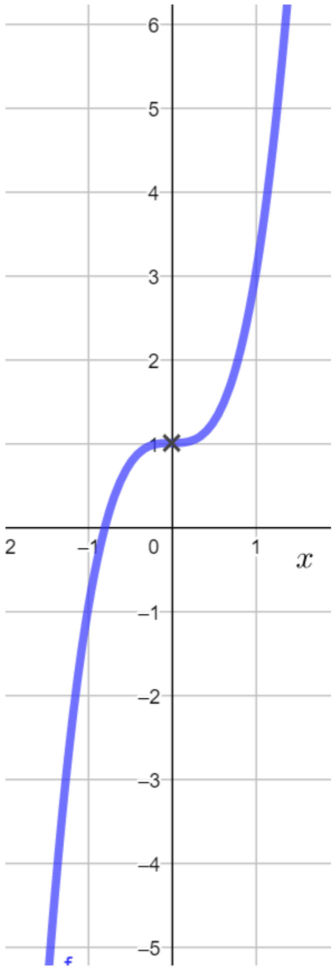
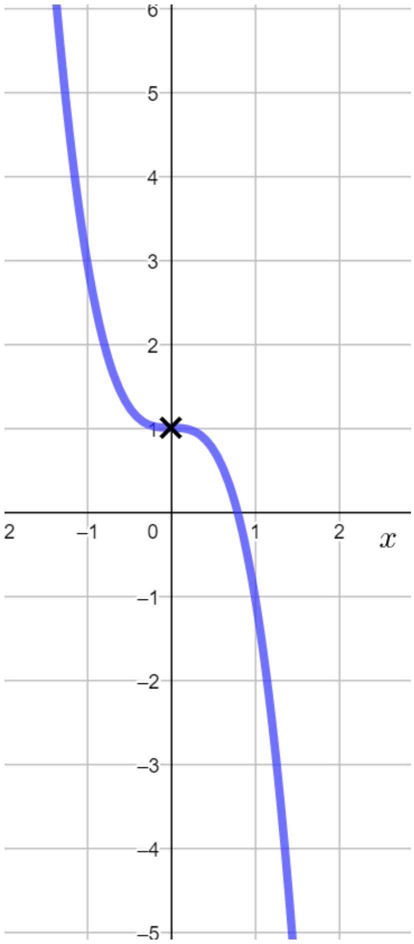
1) Propriété 1

Comme pour les fonctions du type $x \longmapsto ax^3$ les variations des fonctions $x \longmapsto ax^3 + b$ dépendent du signe de a :

$a > 0$	$a < 0$
f **est croissante sur** $\mathbb{R}$	f **est décroissante sur** $\mathbb{R}$

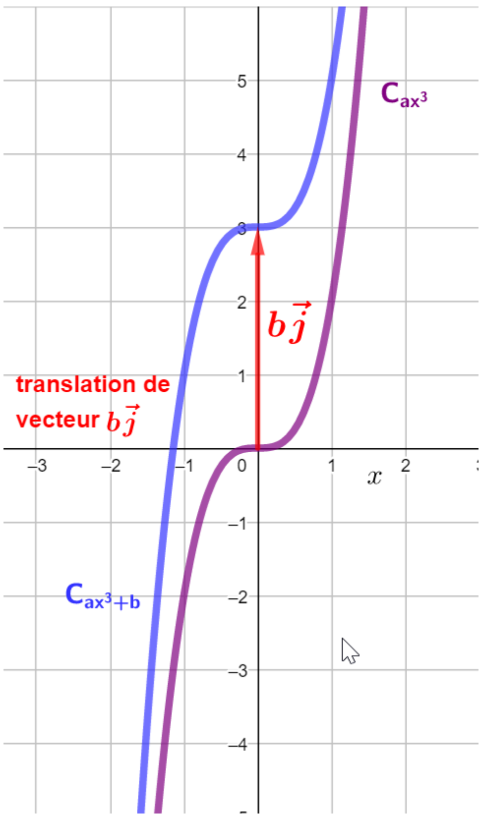
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

$a > 0$	$a < 0$
	
La courbe représentative est symétrique par rapport au point de coordonnées (0 ; b)	

2) Propriété 2

La représentation graphique de la fonction $f(x) = ax^3 + b$ est l'image de celle de la fonction $f(x) = ax^3$ par la translation de vecteur b$\vec{j}$.



La courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2 + 3$ est identiquement la même courbe que celle de $x \mapsto 2x^2$, elle est juste « montée de **3**$\vec{j}$ (**3** carreaux vers le haut).

Autre exemple :
La courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 2$ est identiquement la même courbe que celle de $x \mapsto 2x^2$, elle est juste « descendu de **2**$\vec{j}$ (**2** carreaux vers le bas à cause du signe –).

En résumé :

Les fonctions $x \longmapsto ax^3$ ou $x \longmapsto ax^3 + b$ sont :

- **strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$ et**
- **strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$**

IV) Les fonctions du type $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Pour tout nombre réel a, x_1 , x_2 et x_3 $a \neq 0$, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ sont des fonctions polynômes de degré 3 sous forme factorisée.

Remarque importante : **x_1 ; x_2 et x_3 sont les racines de la fonction f**

A partir de cette forme factorisée nous pouvons déterminer les racines de f et son signe :
Il suffit d'étudier le signe de chaque facteur a , $x - x_1$, $x - x_2$ et $x - x_3$ puis de faire un tableau de signe en appliquant la règle des signes de la multiplication de nombres relatifs.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 3x + 18$

1. Montrer que $f(x) = 3(x - 2)(x + 1)(x - 3)$

2. Déterminer les racines de la fonction f

3. Déterminer le signe de $f(x)$

4. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$

Réponse et méthode :

1. ***Développons*** $3(x-2)(x+1)(x-3)$ ***et montrons que c'est égal à*** $f(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $3(x-2)(x+1)(x-3) = 3(x-2)(x^2-3x+x-3) = 3(x-2)(x^2-2x-3) = 3(x^3-2x^2-3x-2x^2+4x+6) = 3(x^3-4x^2+x+6) = \mathbf{3x^3-12x^2+3x+18 = f(x)}$

2. $f(x) = 3(x-2)(x+1)(x-3)$

$f(x) = 0$ si et seulement si : $3(x-2)(x+1)(x-3) = 0$ si et seulement si :

$x-2=0$ ou $x+1=0$ ou $x-3=0$

$x=2$ ou $x=-1$ ou $x=3$ S $= \{-1\,;2\,;3\}$ ***Les racines de*** f ***sont -1 ; 2 et 3***

3. *On* étudie ainsi le signe de chaque facteur $(x-2)$, $(x+1)$ et $(x-3)$et on présente les résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$	*-1*		*2*		*3*		$+\infty$
3	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$	$-$		$-$	*0*	$+$		$+$	
$x+1$	$-$	*0*	$+$		$+$		$+$	
$x-3$	$-$		$-$		$-$	*0*	$+$	
$f(x)$	$-$	*0*	$+$	*0*	$-$	*0*	$+$	

Donc $f(x) \geq 0$ sur *[-1 ;2]* ∪ *[3 ;+∞[* et $f(x) \leq 0$ sur $]-\infty$ *;* $-1]$ ∪ [2 ; 3]

4. D'après la question précédente : $f(x) \leq 0$ sur $]-\infty$ *;* $-1]$ ∪ [2 ; 3] donc

S=$]-\infty$ *;* $-1]$ ∪ [2 ; 3]

V) Equation de la forme $x^3 = c$

L'équation $x^3 = c$ possède une unique solution $x = \sqrt[3]{c}$ se lit « racine cubique de c ». On peut aussi l'écrire $c^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{8}$ se lit « racine cubique de 8 » et $\sqrt[3]{x^3} = x$ donc $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ ou $8^{\frac{1}{3}} = 2$

Exemples : Résoudre les équations suivantes :

a. $x^3 = 12$

b. $4x^3 - 5 = 103$

Correction :

a. $x = \sqrt[3]{12}$

S $= \{\sqrt[3]{12}\}$

b. $4x^3 = 103 + 5$

$4x^3 = 108$

$x^3 = \frac{108}{4} = 27$

$x = \sqrt[3]{27} = 3$ donc S $= \{3\}$