

# Fonction dérivée. Variation d'une fonction

## I) Fonction dérivée

### 1) Définition

Une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) si, et seulement si elle est dérivable pour tout réel  $a$  de cet intervalle.

Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $D$ , on appelle fonction dérivée de  $f$  sur  $D$  la fonction notée  $f'$  définie sur  $D$  par :  $a \rightarrow f'(a)$

### 2) Dérivées à connaître

#### a) Fonction constante $f(x) = k$ ( $k \in \mathbb{R}$ )

La fonction constante  $f(x) = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa fonction dérivée est  $f'(x) = 0$

#### **Exemple :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3,5$ .

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa fonction dérivée est :  $f'(x) = 0$

#### b) Fonction $f(x) = x$

La fonction  $f(x) = x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa fonction dérivée est  $f'(x) = 1$

#### c) Fonction $f(x) = x^2$

La fonction  $f(x) = x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa fonction dérivée est  $f'(x) = 2x$

#### d) Fonction $f(x) = x^3$

La fonction  $f(x) = x^3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa fonction dérivée est  $f'(x) = 3x^2$

### 3) Tableau récapitulatif

Fonction $f$ :	Dérivable sur :	Fonction dérivée $f'$ :
$f(x) = k (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$

### 4) Dérivées et opérations

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle  $D$ .

- La fonction  $f + g$  est aussi définie et dérivable sur  $D$  et sa dérivée est définie par  $f'(x) + g'(x)$
- La fonction  $k \times f(x)$  est aussi définie et dérivable sur  $D$  et sa dérivée est définie par  $k \times f'(x)$

#### Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°)  $f(x) = x + x^3$  sur  $\mathbb{R}$

La dérivée de  $x$  est 1

La dérivée de  $x^3$  est  $3x^2$

On obtient  $f'(x) = 1 + 3x^2$

2°)  $f(x) = x^2 - x + 1$  sur  $\mathbb{R}$

La dérivée de  $x^2$  est  $2x$

La dérivée de  $x$  est 1 et

La dérivée de 1 est 0

On obtient  $f'(x) = 2x - 1$

3°)  $f(x) = 7x^3$  sur  $\mathbb{R}$

La dérivée de  $x^3$  est  $3x^2$

On obtient  $f'(x) = 7 \times 3x^2 = 21x^2$

4°)  $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$  sur  $\mathbb{R}$

La dérivée de  $x^2$  est  $2x$

La dérivée de  $x$  est 1 et

La dérivée de 1 est 0

On obtient  $f'(x) = 4 \times (2x) - 5 \times 1 + 0 = 8x - 5$

Fonction	Dérivable sur	Dérivée
$f + g$	$D$	$f' + g'$
$k \times f$	$D$	$k \times f'$

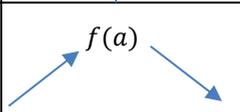
## II) Sens de variation d'une fonction et extremum local

### 1) Signe de $f'$ et variation de $f$

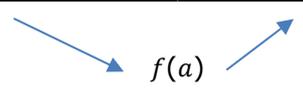
- $f$  est **croissante** sur  $I$  équivaut à : pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$
- $f$  est **décroissante** sur  $I$  équivaut à : pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$
- $f$  est **constante** sur  $I$  équivaut à : pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$

### 2) Extremum locaux

Si la fonction dérivée  $f'$  s'annule en  $a$  en changeant de signe de part et d'autre de  $a$ , alors  $f$  admet un **extremum local** en  $a$  :

$x$	$a$
Signe de $f'(x)$	+    0    -
Variation de $f$	

$f(a)$  est un **maximum local**

$x$	$a$
Signe de $f'(x)$	-    0    +
Variation de $f$	

$f(a)$  est un **minimum local**

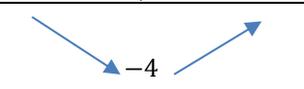
**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 4$

Sa dérivée est  $f'(x) = 2x$  et  $f'(x) = 0$  si et seulement si  $2x = 0$  donc  $x = 0$

De plus  $2x \geq 0$  si et seulement si  $x \geq 0$  et  $2x \leq 0$  si et seulement si  $x \leq 0$

En résumé  $f'(0) = 0$  et si  $x \geq 0$   $f'(x) \geq 0$  et si  $x \leq 0$   $f'(x) \leq 0$  et  $f(0) = 0^2 - 4 = -4$

$-4$  est bien un extremum local, c'est un minimum

$x$	$0$
$f'(x)$	-    0    +
$f(x)$	

**Autre exemple :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 1$

$f'(x) = 3x^2$   $f'(x) = 0$  si et seulement si  $3x^2 = 0$  donc  $x = 0$  mais  $f'(x)$  ne change pas de signe (un carré étant toujours positif donc sans ce cas  $f(0)$  n'est pas un extremum).

$x$	$0$
$f'(x)$	+    0    +
$f(x)$	

### 3) Etude de variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction :

1. Calcul de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$
2. Etude du signe de la dérivée  $f'$  sur  $I$
3. Construction du tableau de variations

$x$	<b>Intervalle de définition de <math>f : I</math></b>
<b>Signe de <math>f'(x)</math></b>	<b>Signes</b>
<b>Variations de <math>f</math></b>	<b>Variations et extremum locaux</b>

**Exemple 1 :** Etudier les variations de la fonction définie sur  $[-5 ; 5]$  par  $f(x) = 2x^2 + 8x + 1$

1) On calcule la fonction dérivée de la fonction  $f$ :  $f'(x) = 4x + 8$

2) On résout l'équation  $f'(x) = 0$  :  $f'(x) = 0$  si et seulement si  $4x + 8 = 0$

$$x = -2$$

3) On étudie le signe de la fonction  $f'$  :  $f'(x) \geq 0$  si et seulement si  $x \in [-2 ; 5]$  et  $f'(x) \leq 0$  si et seulement si  $x \in [-5 ; -2]$

4) On fait le tableau de variation :

$x$	-5	-2	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	11	-7	91

$f'(x) \leq 0$  sur l'intervalle  $[-5 ; -2]$  donc  $f$  est décroissante sur cet intervalle

$f'(x) \geq 0$  sur l'intervalle  $[-2 ; 5]$  donc  $f$  est croissante sur cet intervalle.

$$f(-5) = 2 \times (-5)^2 + 8 \times (-5) + 1 = 50 - 40 + 1 = 11$$

$$f(5) = 2 \times 5^2 + 8 \times 5 + 1 = 50 + 40 + 1 = 91$$

$$f(-2) = 2 \times (-2)^2 + 8 \times (-2) + 1 = -7$$

**Exemple 2 :** Etudier les variations de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x^2 - 2$

1) On calcule la fonction dérivée de la fonction  $f$ :  $f'(x) = 6x$

2) On résout l'équation  $f'(x) = 0$  :  $f'(x) = 0$  si et seulement si  $6x = 0$  soit  $x = 0$

3) On étudie le signe de la fonction  $f'$  :  $f'(x) \geq 0$  si et seulement si  $x \geq 0$  c'est-à-dire sur  $[0 ; +\infty[$   $f'(x) \leq 0$  si et seulement si  $x \leq 0$  c'est-à-dire sur  $] -\infty ; 0]$

4) On fait le tableau de variation :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		-2	

$f'(x) \leq 0$  sur l'intervalle  $] -\infty ; 0]$  donc  $f$  est décroissante sur cet intervalle

$f'(x) \geq 0$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  donc  $f$  est croissante sur cet intervalle.

$$f(0) = 3 \times 0^2 - 2 = -2$$

### III) Tangente à une courbe en un point

#### 1) Tangente à une courbe en un point

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ ,  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative et A le point de  $(\mathcal{C})$  d'abscisse  $a$ .

La tangente à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point A  $(a ; f(a))$  est la droite passant par A de coefficient directeur  $f'(a)$ .

**Remarque :** La tangente à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe  $(\mathcal{C})$  au voisinage du point A.

#### 2) Equation de la tangente

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ ,  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative et A le point de  $(\mathcal{C})$  d'abscisse  $a$ .

La tangente à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point A a pour équation :

$$y = f(a) + (x - a) f'(a)$$

**Remarque :** La tangente à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe  $(\mathcal{C})$  au voisinage du point A.

#### **Exemple :**

Donner une équation de la tangente à la courbe  $(\mathcal{C})$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 3$  au point d'abscisse 3

On a vu précédemment que  $f'(3) = 6$  de plus  $f(3) = 6$  donc une équation de cette tangente est :

$$y = 6(x - 3) + 6 \text{ soit } y = 6x - 12$$

