Fonction dérivée. Variation d'une fonction

I) Fonction dérivée

1) Définition

Une fonction f est dérivable sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) si, et seulement si elle est dérivable pour tout réel a de cet intervalle.

Si f est dérivable sur un intervalle D, on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction notée f' définie sur D par : $a \to f'(a)$

2) Dérivées à connaitre

a) Fonction constante $f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$

La fonction constante $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 0$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3{,}5$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x)$ **= 0**

b) Fonction $f(x) = x$

La fonction $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 1$

c) Fonction $f(x) = x^2$

La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 2x$

d) Fonction $f(x) = x^3$

La fonction $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 3x^2$

3) Tableau récapitulatif

Fonction f :	Dérivable sur :	Fonction dérivée f' :
$f(x) = k \; (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$

4) Dérivées et opérations

Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle D.

• La fonction $f + g$ est aussi définie et dérivable sur D et sa dérivée est définie par $f'(x) + g'(x)$

• La fonction $k \times f(x)$ est aussi définie et dérivable sur D et sa dérivée est définie par $k \times f'(x)$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x + x^3$ sur $\mathbb{R}$
La dérivée de x est 1
La dérivée de x^3 est $3x^2$

On obtient $f'(x)$ **=** $\mathbf{1 + 3x^2}$

2°) $f(x) = x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{R}$
La dérivée de x^2 est $2x$
La dérivé de x est 1 et
La dérivée de 1 est 0

On obtient $f'(x)$ **=** $\mathbf{2x - 1}$

3°) $f(x) = 7x^3$ sur $\mathbb{R}$
La dérivée de x^3 est $3x^2$
On obtient $f'(x) = 7 \times 3x^2 = 21x^2$

4°) $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$
La dérivée de x^2 est $2x$
La dérivé de x est 1 et
La dérivée de 1 est 0
On obtient $f'(x) = 4 \times (2x) - 5 \times 1 + 0 = 8x - 5$

Fonction	Dérivable sur	Dérivée
$f + g$	D	$f' + g'$
$k \times f$	D	$k \times f'$

II) Sens de variation d'une fonction et extremum local

1) Signe de f' et variation de f

- **f est croissante sur I équivaut à : pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$**
- **f est décroissante sur I équivaut à : pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$**
- **f est constante sur I équivaut à : pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$**

2) Extremum locaux

Si le fonction dérivée f' s'annule en a en changeant de signe de part et d'autre de a , alors f admet un extremum local en a :

x		a	
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variation de f	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a)$ est un maximum local

x		a	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variation de f	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a)$ est un minimum local

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$

Sa dérivée est $f(x) = 2x$ et $f'(x) = 0$ si et seulement si $2x = 0$ donc $x = 0$

De plus $2x \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$ et $2x \leq 0$ si et seulement si $x \leq 0$

En résumé $f'(0) = 0$ et si $x \geq 0$ $f'(x) \geq 0$ et si $x \leq 0$ $f'(x) \leq 0$ et $f(0) = 0^2 - 4 = -4$

-4 est bien un extremum local, c'est un minimum

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

Autre exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 1$

$f'(x) = 2x^2$ $f'(x) = 0$ si et seulement si $2x^2 = 0$ donc $x = 0$ mais $f'(x)$ ne change pas de signe (un carré étant toujours positif donc sans ce cas $f(0)$ n'est pas un extremum.

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$

3) Etude de variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction :

1. Calcul de la fonction dérivée f' de f

2. Etude du signe de la dérivée f' sur I

3. Construction du tableau de variations

x	**Intervalle de définition de f : I**
Signe de $f'(x)$	**Signes**
Variations de f	**Variations et extremum locaux**

Exemple 1 : Etudier les variations de la fonction définie sur $[-5\,;5]$ par $f(x) = 2x^2 + 8x + 1$

1) On calcule la fonction dérivée de la fonction f: $f'(x) = 4x + 8$

2) On résout l'équation $f'(x) = 0$: $f'(x) = 0$ si et seulement si $4x + 8 = 0$

$x = -2$

3) On étudie le signe de la fonction f' : $f'(x) \geq 0$ si et seulement $x \in$ [-2 ; 5] et $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in [-5\ ;\ -2]$

4) On fait le tableau de variation :

x	-5		-2		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	11	↘	-7	↗	91

$f'(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[-5\ ;\ -2]$ donc f est décroissante sur cet intervalle

$f'(x) \geq 0$ sur l'intervalle [-2 ; 5] donc f est croissante sur cet intervalle.

$f(-5) = 2 \times (-5)^2 + 8 \times (-5) + 1 = 50 - 40 + 1 = 11$

$f(5) = 2 \times 5^2 + 8 \times 5 + 1 = 50 + 40 + 1 = 91$

$f(-2) = 2 \times (-2)^2 + 8 \times (-2) + 1 = -7$

Exemple 2 : Etudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2$

1) On calcule la fonction dérivée de la fonction f: $f'(x) = 6x$

2) On résout l'équation $f'(x) = 0$: $f'(x) = 0$ si et seulement si $6x = 0$ soit $x = 0$

3) On étudie le signe de la fonction f' : $f'(x) \geq 0$ si et seulement $x \geq 0$ c'est-à-dire sur $[0\ ;+\infty[$
$f'(x) \leq 0$ si et seulement $x \leq 0$ c'est-à-dire sur $]-\infty\ ;\ 0]$

4) On fait le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-2	↗	

$f'(x) \leq 0$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$donc f est décroissante sur cet intervalle

$f'(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$donc f est croissante sur cet intervalle.

$f(0) = 3 \times 0^2 - 2 = -2$

III) Tangente à une courbe en un point

1) Tangente à une courbe en un point

Soit f une fonction dérivable en a, ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative et A le point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse a.

La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A (a ; (a)) est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque : La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe ($\mathscr{C}$) au voisinage du point A.

2) Equation de la tangente

Soit f une fonction dérivable en a, ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative et A le point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse a.

La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A a pour équation :

$$y = f(a) + (x - a)\ f'(a)$$

Remarque : La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe ($\mathscr{C}$) au voisinage du point A.

Exemple :

Donner une équation de la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$ au point d'abscisse 3

On a vu précédemment que $f'(3) = 6$ de plus $f(3) = 6$ donc une équation de cette tangente est :
$y = 6(x - 3) + 6$ soit $y = 6x - 12$