Probabilités conditionnelles

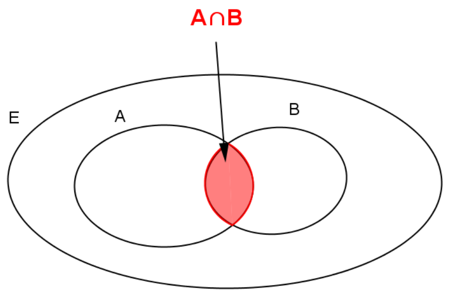
I) Probabilités rappels

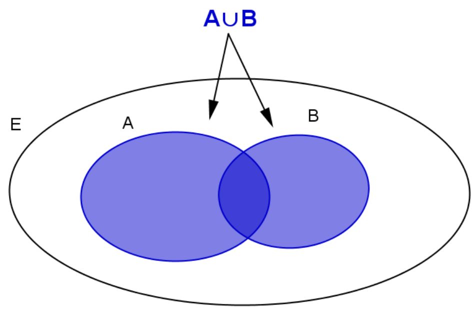
1) Intersection et réunion d'événements

a) Définition

A et B sont deux événements d'un même univers E.

- **L'intersection de A et B est l'événement noté $A \cap B$ formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A et l'événement B.**
- **La réunion de A et B est l'événement noté $A \cup B$ formé des issues qui réalisent l'événement A ou l'événement B, c'est à dire au moins l'un des deux.**





Exemples :

1) Dans une urne on place 10 cartons portant chacun un numéro de 1 à 10. On extrait un carton de l'urne. On considère les événements :
A : « le carton extrait porte un numéro divisible par 3 »
B : « le carton extrait porte un numéro inférieur ou égal à 6 »
On a : $A = \{ 3, 6 , 9 \}$ et $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
Alors :
$A \cap B$: « le carton extrait porte un numéro divisible par 3 **et** inférieur ou égal à 6 »
d'où $A \cap B = \{ 3, 6 \}$
et $A \cup B$: « le carton extrait porte un numéro divisible par 3 **ou** inférieur ou égal à 6 »
d'où $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 , 9 \}$

2) Dans un sac on place les 4 rois, les 4 dames et les 4 valets d'un jeu de cartes.
On extrait du sac une carte et on considère les événements suivants :
T : « la carte extraite est une carte de trèfle »
D : « la carte extraite est une dame »
Alors :
$T \cap D$: « la carte extraite est une carte de trèfle **et** une dame»
d'où $T \cap D$ = { dame de trèfle } et
et $T \cup D$: « la carte extraite est une carte de trèfle **ou** une dame»
d'où $T \cup D$ = { roi de trèfle, dame de trèfle, valet de trèfle, dame de carreau, dame de cœur, dame de pique }

2) Evénements incompatibles

Soit A et B deux événements d'un même univers. Lorsque aucune issue ne réalise à la fois l'événement A et l'événement B, on dit que les événements A et B sont incompatibles, on a alors $A \cap B = \varnothing$

Dans ce cas on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Exemples :

Reprenons les exemples précédents

1) Dans le cas de l'urne contenant les 10 cartons numérotés de 1 à 10, considérons les événements :
C : « le carton extrait porte un numéro pair »
D : « le carton extrait porte un numéro impair »

Les événements C et D sont incompatibles. $p(C \cup D) = p(C) + p(D) = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} = 1$

2) Dans le cas du sac contenant les cartes, considérons les événements suivants :
R : « la carte extraite est roi »
V : « la carte extraite est un valet »
K : « la carte extraite est une carte de carreau »
T : « la carte extraite est une carte de trèfle »

Les événements R et V sont incompatibles, les événements K et T le sont aussi
$p(R \cup V) = p(R) + p(V) = \frac{4}{12} + \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
$p(K \cup T) = p(K) + p(T) = \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

3) Propriété

Soit deux événements A et B d'un même univers sur lequel on a défini une loi de probabilité p.

Pour tout A et tout B on a : $p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Exemples :

1) Dans un sac on place 5 jetons rouges numérotés de 1 à 5 et 3 jetons blancs numérotés de 1 à 3. Tous les jetons sont indiscernables au toucher. On extrait un jeton du sac. On considère les événements :
A : « le jeton extrait est blanc »
B : « le jeton porte le numéro 2 »
C : « le jeton porte le numéro 5 »

Comme les jetons sont indiscernables au toucher, l'expérience suit une loi équirépartie et on donc : $p(A) = \frac{3}{8}$ $p(B) = \frac{2}{8}$ et $p(C) = \frac{1}{8}$

On a $A \cap B$: « le jeton extrait est blanc et porte le numéro 2 » d'où $p(A \cap B) = \frac{1}{8}$

et $A \cup B$: « le jeton extrait est blanc ou porte le numéro 2 » d'où $p(A \cup B) = \frac{4}{8}$

(en effet il y a 3 jetons blancs , 1 jeton rouge portant le numéro 2)

On a bien $p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

On remarque que A et C sont incompatibles (en effet aucun jeton blanc ne porte le numéro 5)

d'où $p(A \cap C) = 0$ et donc $p(A \cup C) = p(A) + p(C) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

2) Soit un univers E et deux événements de E, tels que $p(A) = 0{,}3$ et $p(B) = 0{,}4$ de plus $p(A \cup B) = 0{,}5$

Alors on peut calculer $p(A \cap B)$: $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0{,}2$

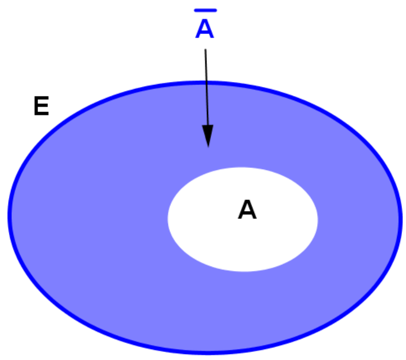
4) Evénement contraire

Soit A un événement d'un univers E.

L'événement contraire de A est l'événement formé des issues de E qui ne réalisent pas A

On le note $\overline{A}$

On a $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$



d'où $p(\overline{A}) + p(A) = 1$ en appliquant la formule vue au 3)

Exemples :

1) On jette une pièce de monnaie truquée de telle manière qu'elle retombe sur pile 2 fois sur 3. On appelle A l'événement « la pièce retombe sur Pile »

On a donc $p(A) = \frac{2}{3}$ si on appelle B l'événement « la pièce retombe sur Face » , il est clair que $B = \overline{A}$ donc $p(B) = 1 - p(A) = \frac{1}{3}$

2) On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements :

A : « la face qui apparaît est un multiple de 5 ».
B : « la face qui apparaît n'est pas un multiple de 5 ».

A et B sont évidemment deux événements contraires donc $p(A) + p(B) = 1$

comme $p(A) = \frac{1}{6}$ on a $p(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

II) Probabilité conditionnelle

Définition

Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé. On le note $P_A(B)$ et on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Rappel : $A \cap B$ (l'intersection) est l'ensemble des issues appartenant à la fois à A et à B.

Remarques :

• $P_A(B)$ est une probabilité conditionnelle : la condition est exprimée par « sachant que A est réalisé. »

• On écrit aussi : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

• Si P(B)≠ 0 on a aussi $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

• Aussi en général, $P_B(A) \neq P(B)$

Exemple 1 : Dans une classe de Première 55% des élèves sont des filles et 40% des élèves sont des filles demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille.

Soit F l'évènement : « être une fille » et D l'évènement : « être demi-pensionnaire »

$$P_F(D) = \frac{p(F \cap D)}{p(F)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{40}{55} = \frac{8}{11}$$

Exemple 2 : Un professeur de mathématiques trie sa bibliothèque dans laquelle figure 32 manuels de différents niveaux, certains conformes aux programmes actuels et d'autres, plus vieux ne sont pas conformes. La répartition des manuels est donnée dans le tableau suivant :

	Conforme	**Non conforme**	**Total**
Seconde	**6** (S $\cap C$)	**7** (S $\cap \bar{C}$)	**13**
Première	**3** (P $\cap C$)	**5** (P $\cap \bar{C}$)	**8**
Terminale	**5** (T $\cap C$)	**6** (T $\cap \bar{C}$)	**11**
Total	**14**	**18**	**32**

Il prend un manuel au hasard, et on considère les évènements suivants :

C : « Le manuel est conforme aux programmes actuels. »

S : « Le manuel est un manuel de seconde. »

T : « Le manuel est un livre de Terminale. »

Nombre de livres conformes

$P(C) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$

Nombre total de livres

Nombre de livres de seconde

$P(S) = \frac{13}{32}$

Nombre total de livres

Nombre de livres de terminale

$P(T) = \frac{11}{32}$

Nombre total de livres

Nombre de livres de **terminale conformes** ($\bar{S} \cap C$)

$P_C(T) = \frac{5}{11}$

Nombre total de livres **conformes**

Nombre de livres de première et terminale et conformes ($\bar{S} \cap C$)

$P_C(\bar{S}) = \frac{3+5}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

Nombre total de livres **conformes**

Nombre de livres **conformes en premières et terminales** ($\bar{S} \cap C$)

$P_{\bar{S}}(C) = \frac{3+5}{8+11} = \frac{8}{19}$

Nombre total de livres **de** première et terminale ($\bar{S}$)

Exemple 3 :

1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi".
Donc $A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de pique".

Alors : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. Dans un jeu de 32 cartes nous avons 8 piques.
et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$. Dans un jeu de 32 cartes il y a un seul roi de pique.
Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$.

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un pique, on a une chance sur 8 d'obtenir le roi.