Dérivées et opérations

Préalable :

Dans toute la suite u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel.

I) Somme de deux fonctions

La fonction $u + v$ définie par $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction $u + v$ pour $a \in$ D
Pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h \in$ D

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Les fonctions u et v étant dérivables en a, lorsque h tend vers 0 le premier quotient tend vers $u'(a)$ et le deuxième quotient vers $v'(a)$

Le taux de variation de la fonction $u + v$ tend vers $u'(a) + v'(a)$
Pour tout $a \in$ D la fonction dérivée de la fonction $u + v$ est bien $u' + v'$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x + x^4$ sur $\mathbb{R}$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = 1 + 4x^3}$

2°) $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 - 3$ pour x réel, $x \neq 0$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2x}$

II) Produit d'une fonction par un réel

La fonction λu définie par $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$ est dérivable sur D et

sa dérivée est définie par $(\lambda u)'(x) = \lambda u'(x)$.

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction λu pour $a \in$ D
Pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h \in$ D

$$\frac{(\lambda u)(a+h)-(\lambda u)(a)}{h} = \frac{\lambda u(a+h)-\lambda u(a)}{h} = \lambda \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

Or la fonction u étant dérivable en a, lorsque h tend vers 0 le quotient tend vers $u'(a)$.

Le taux de variation de la fonction λu tend vers $\lambda u'(a)$
Pour tout $a \in$ D la fonction dérivée de la fonction λu est bien $\lambda u'$.

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = 7x^3$ sur $\mathbb{R}$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = 7 \times 3x^2 = 21x^2}$

2°) $f(x) = \dfrac{4}{x}$ pour x réel, $x \neq 0$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = -\dfrac{4}{x^2}}$

3°) $f(x) = 5x^2 - 3\sqrt{x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

On obtient $f'(x) = 10x - 3\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \boldsymbol{10x - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}}$

III) Fonction polynôme

1) Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme si $f(x)$ peut s'écrire comme une somme de termes de la forme kx^n avec $k \in \mathbb{R}$ et $n \in N$.

2) Dérivée

Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

Ceci est une conséquence des résultats du I) et du II)

Exemples :

Calculer les dérivées des fonctions polynômes suivantes sur $\mathbb{R}$:

1°) $f(x) = x^2 + 3x - 5$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = 2x + 3}$

2°) $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 5$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = \frac{9}{2}x^2 - 10x + \frac{1}{2}}$

IV) Produit de deux fonctions

La fonction uv définie par $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction uv pour $a \in$ D
Pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h \in$ D

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$

En soustrayant et ajoutant $u(a)v(a+h)$ au numérateur ce taux de variation s'écrit :

$$\frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$$

Ou encore :

$$\frac{v(a+h)(u(a+h)-u(a))}{h} + \frac{u(a)(v(a+h)-v(a))}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h}\,v(a+h) + u(a)\,\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Les fonctions u et v étant dérivables en a, lorsque h tend vers 0,

$\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tend vers $u'(a)$ et $\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ vers $v'(a)$

En admettant que lorsque h tend vers 0, $v(a+h)$ tend vers $v(a)$

$\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\ v(a+h) + u(a)\ \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ tend vers $u'(a)\ v(a) + u(a)\ v'(a)$

Donc le taux de variation de la fonction $u\,v$ tend vers $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

Pour tout $a \in$ D la fonction dérivée de la fonction uv est bien $u'v + uv'$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$ on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}}$

2°) $f(x) = (x^3+3x+1)(2x^2+5x-1)$ sur $\mathbb{R}$

En posant $u(x) = x^3+3x+1$ et $v(x) = 2x^2+5x-1$ on a

$u'(x) = 3x^2+3$ et $v'(x) = 4x+5$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = (3x^2+3)(2x^2+5x-1) + (x^3+3x+1)(4x+5)}$

On peut développer cette expression si c'est nécessaire.

V) Inverse d'une fonction

La fonction $\frac{1}{v}$ définie par $\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur l'ensemble D privé des réels où $v(x) = 0$ (D ∩ { x I $v(x) \neq 0$ }) et sa dérivée est définie par:

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$$

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction $\frac{1}{v}$ pour $a \in$ D ∩ {x I $v(x) \neq 0$ }

Pour tout $h \neq 0$ tel que $a+h \in$ D ∩ {x I $v(x) \neq 0$ }

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(a)}{h} = \frac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{\frac{v(a)-v(a+h)}{v(a+h)v(a)}}{h} = \frac{-v(a+h)+v(a)}{hv(a+h)v(a)} =$$

$$= -\frac{v(a+h)-v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a+h)v(a)}$$

La fonction v étant dérivable en a, lorsque h tend vers 0,

$\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ tend vers $v'(a)$

En admettant que lorsque h tend vers 0, $v(a+h)$ tend vers $v(a)$

alors $\frac{1}{v(a+h)v(a)}$ tend vers $\frac{1}{v(a)^2}$

Le taux de variation de la fonction $\frac{1}{v}$ tend vers $-\frac{v'a)}{(v(a))^2}$

Pour tout $a \in$ D $\cap\{x \mid v(x) \neq 0\}$ la fonction dérivée de la fonction $\frac{1}{v}$ est bien $-\frac{v\prime}{v^2}$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{7}}$ sur $\mathbb{R}$

En posant $u(x) = x^2 + 7$ on a $u'(x) = 2x$

On obtient $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ **=** $\frac{\mathbf{-2}\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{7})^{\mathbf{2}}}$

2°) $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{x}}$ sur $]\, 0\,;\, +\infty\, [$

En posant $u(x) = \sqrt{x}$ on a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

On obtient $f'(x) = \frac{\frac{-4}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{-2}{x\sqrt{x}}$

VI) Quotient de deux fonctions

La fonction $\frac{u}{v}$ définie par $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur l'ensemble D privé

des réels où $v(x) = 0$ (D $\cap$ { x / $v(x) \neq 0$ }) et sa dérivée est définie par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Démonstration :

Le résultat s'obtient à l'aide des résultats du V) et VI) en écrivant : $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$
En effet avec cette écriture :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = u' \times \frac{v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

D'où le résultat annoncé.

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = \frac{3x+1}{5x-3}$ sur $]-\infty\ ;\ \frac{3}{5}[\ \cup\ ]\frac{3}{5}\ ;\ +\infty[$

En posant $u(x) = 3x+1$ et $v(x) = 5x-3$ on a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 5$

On obtient $f'(x) = \frac{3(5x-3)-5(3x+1)}{(5x-3)^2} = \boldsymbol{\frac{-14}{(5x-3)^2}}$

2°) $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{3x+1}$ sur $]-\infty\ ;\ -\frac{1}{3}[\ \cup\ ]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty[$

En posant $u(x) = 2x^2-3x+1$ et $v(x) = 3x+1$ on a $u'(x) = 4x-3$ et $v'(x) = 3$

On obtient $f'(x) = \frac{(4x-3)(3x+1)-3(2x^2-3x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{12x^2+4x-9x-3-6x^2+9x-3}{(3x+1)^2}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{6x^2+4x-6}{(3x+1)^2}}$$

VII) Tableau récapitulatif

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel on a :

Fonction	***Dérivable sur***	***Dérivée***
$\boldsymbol{u + v}$	D	$\boldsymbol{u' + v'}$
$\boldsymbol{\lambda u}$	D	$\boldsymbol{\lambda u'}$
$\boldsymbol{uv}$	D	$\boldsymbol{u'v + uv'}$
$\boldsymbol{\frac{1}{v}}$	D $\cap$ $\{\boldsymbol{x}\ /\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \neq 0\ \}$	$\boldsymbol{-\frac{u'}{u^2}}$
$\boldsymbol{\frac{u}{v}}$	D $\cap$ $\{\boldsymbol{x}\ /\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \neq 0\ \}$	$\boldsymbol{\frac{u'v - uv'}{v^2}}$