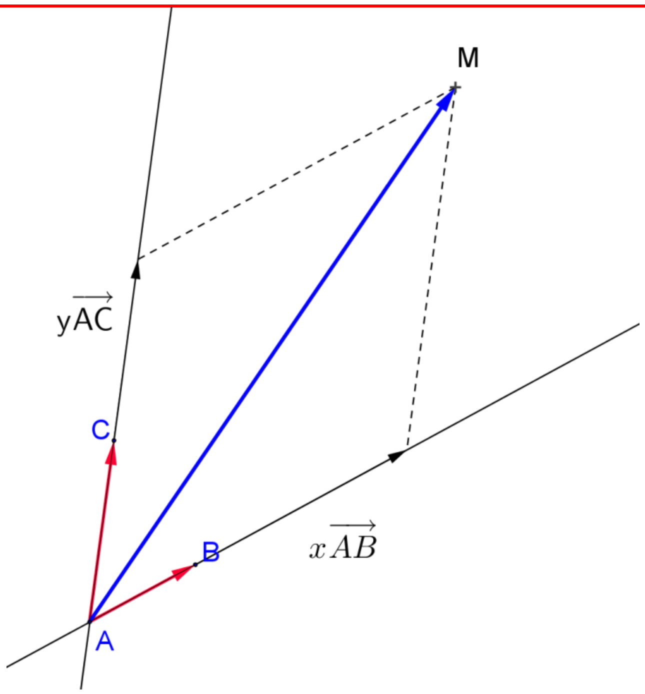
Décomposition de vecteurs et coordonnées

I) Décomposition de vecteurs :

1) Théorème 1:

A, B et C sont trois points non alignés, alors pour tout M, il existe un unique couple de nombre (x ; y) tels que : $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

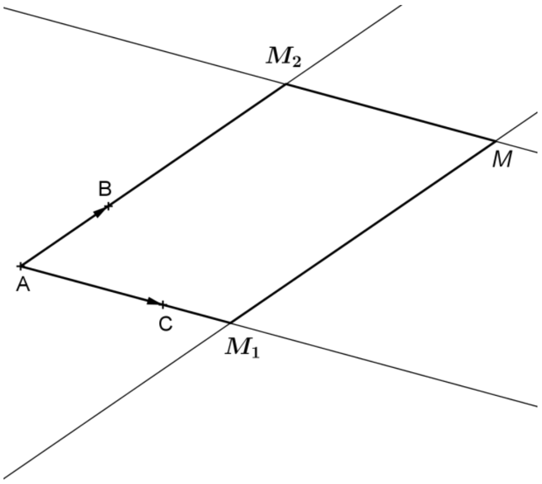
Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) , M a pour coordonnées (x ; y).



2) Démonstration

• Existence de la décomposition :

A est un point du plan du plan. La parallèle à (AB) passant par le point M coupe (AC) en M_1. La parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en M_2.



AM_1MM_2 est donc un parallélogramme.

On a donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2}$

$\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires , il existe donc un nombre réel x tel que : $\overrightarrow{AM_1} = x\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM_2}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires , il existe donc un nombre réel y tel que : $\overrightarrow{AM_2} = y\,\overrightarrow{AB}$

Finalement on obtient :

$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AC} + y\,\overrightarrow{AB}$

- **Unicité de la décomposition :**

$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AC} + y\,\overrightarrow{AB}$

$\quad = x'\,\overrightarrow{AC} + y'\,\overrightarrow{AB}$

Ainsi : $(x - x')\,\overrightarrow{AC} = (y' - y)\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc :

$x - x' = 0$ donc $x = x'$

$y - y' = 0$ donc $y = y'$

Ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

3) Exemple:

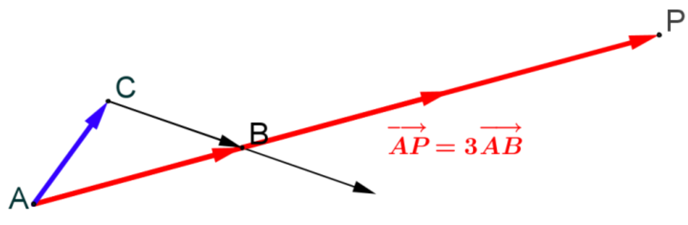
A, B , C étant trois points non alignés. Les points P et R sont tels que :

$\overrightarrow{AP} = 3\,\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CR} = 2\,\overrightarrow{CB}$

Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) :

- $\overrightarrow{AP} = 3\,\overrightarrow{AB}$, on peut donc écrire: $\overrightarrow{AP} = 3\,\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AC}$.

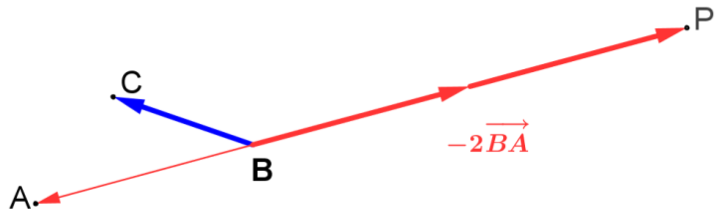
Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) , P a donc pour coordonnées : (3 ; 0).



Mais si on prend comme repère : (B ; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}$) ,alors :

- $\overrightarrow{AP} = 3\,\overrightarrow{AB}$. Dans le nouveau repère , l'origine est **B** . On applique la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = 3\,\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BP} = 3\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ donc $\qquad$ $\overrightarrow{BP} = -2\,\overrightarrow{BA}$

Dans le repère (B ; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}$) P a donc pour coordonnées : (0 ; -2).



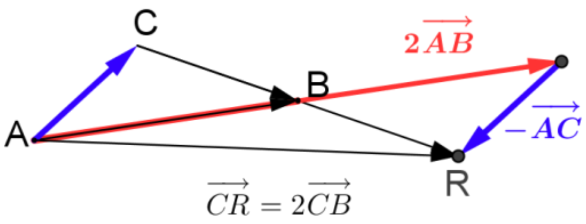
De même, dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) :

• $\overrightarrow{CR} = 2\,\overrightarrow{CB}$, on applique la relation de Chasles : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AR} = 2\,(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AR} = 2\,\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$ $\quad\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$ $\quad\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ donc

$\boldsymbol{\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}$.

Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) R a donc pour coordonnées : (2 ; -1).

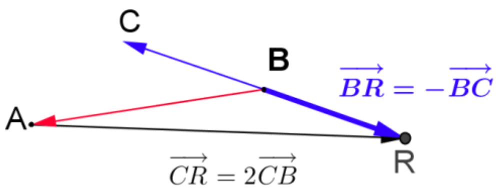


Mais si on prend comme repère : (B ; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}$) ,alors :

• $\overrightarrow{CR} = 2\,\overrightarrow{CB}$, on applique la relation de Chasles : $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BR} = 2\,\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BR} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{CB}$ $\quad\overrightarrow{BR} = -\overrightarrow{BC}$

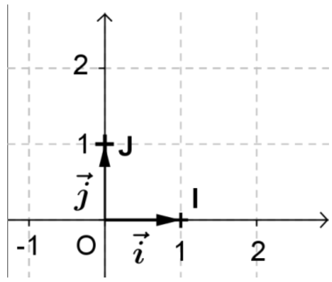
Dans le repère (B ; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}$), R a donc pour coordonnées : (-1 ; 0).

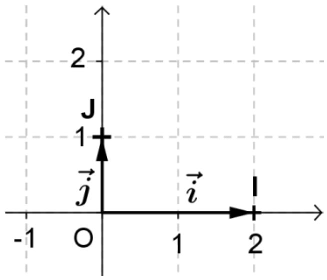


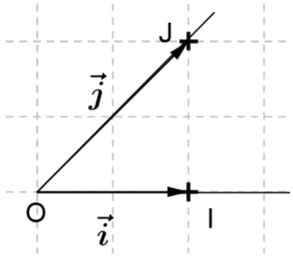
II) Repères :

1) Définition

Il existe différents types de repères (les deux premiers ont été vus dans les classes précédentes) :







Repère orthonormé :

• (OI) ⊥ (OJ)

• OI = OJ = 1

C'est un repère dont les axes sont perpendiculaires et sont munis d'une même unité de longueur.

Repère orthogonal :

• (OI) ⊥ (OJ)

C'est un repère dont les axes sont perpendiculaires.

Repère quelconque :

On pose :

$\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ **et** $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

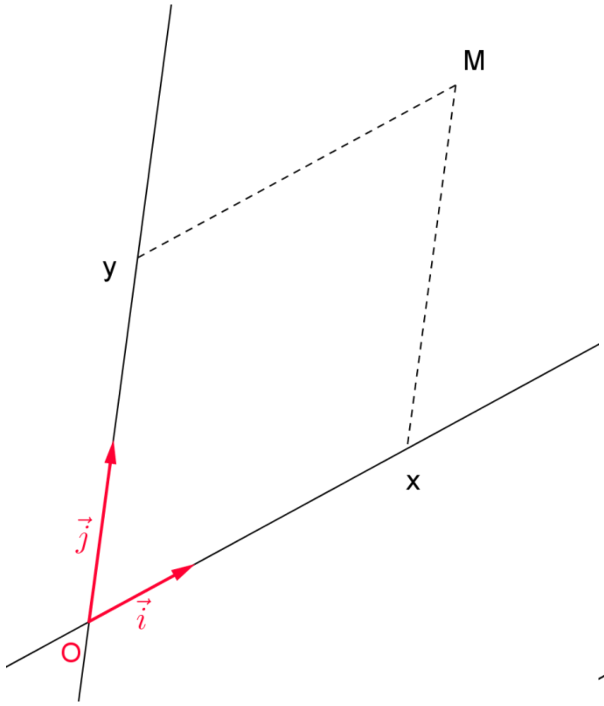
Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.

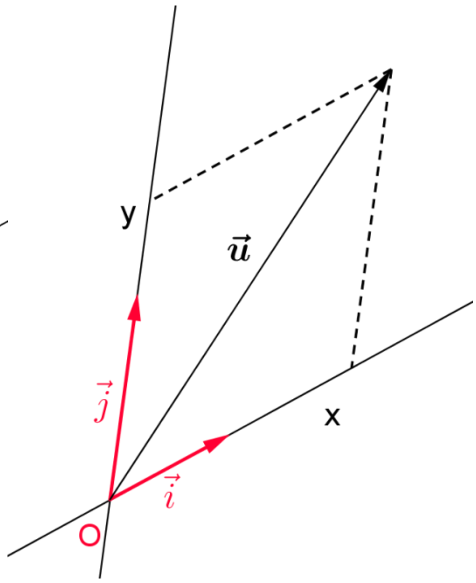
Pour définir un repère quelconque il nous faut :

• Un point appelé origine du repère (ici le point O)

• Un couple de vecteurs non colinéaires ici : $\vec{i}$ et $\vec{j}$

• On notera ce repère : (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) ou (O ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$)

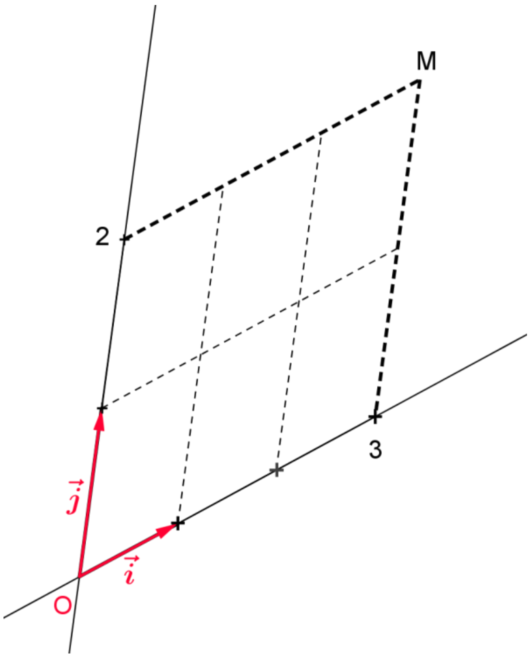




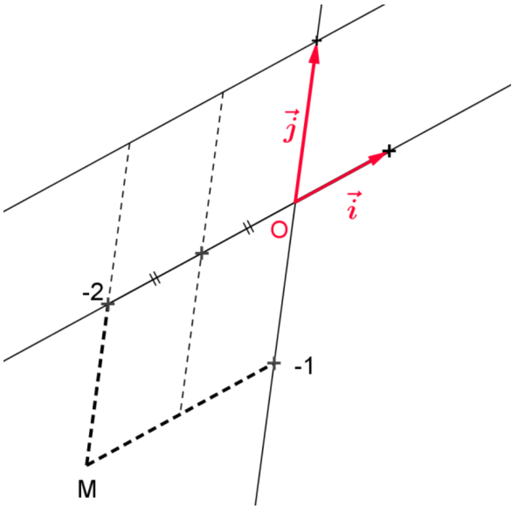
$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$.
Dans le repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$)
les coordonnées du point M sont :
M(x ; y)

$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$.
dans le repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$)
les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont :
$\vec{u}$ (x ; y)

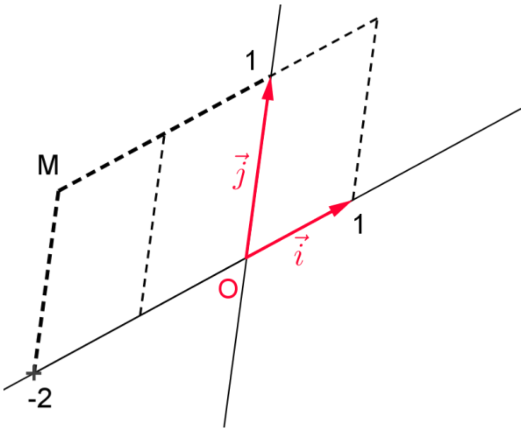
2) Exemples :



Sur la figure ci-contre, $\overrightarrow{OM} = 3\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}$.
Les coordonnées du point M sont donc :
M (3 ; 2)



Sur la figure ci-contre, $\overrightarrow{OM} = -2\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.
Les coordonnées du point M sont donc :
M (-2 ; -1)



Sur la figure ci-contre, $\overrightarrow{OM} = -2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
Les coordonnées du point M sont donc :
M (-2 ; 1)