Equations du second degré

Résolution d'équation du second degré :

$a\,x^2 + b\,x + c = 0$ avec $a \neq 0$.

.

I) Discriminant

Le réel $b^2 - 4\,a\,c$ se note Δ et s'appelle le discriminant du trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$ ou du polynôme du second degré $a\,x^2 + b\,x + c$.

Exemples :

• Calculer le discriminant du trinôme $3\,x^2 - 5\,x + 1$ on a : $a = 3$; $b = -5$ et $c = 1$

Réponse : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 25 - 12 = 13$

$\Delta = 13$

• Calculer le discriminant de $\frac{1}{2}\;x^2 + x + 5$: on a : $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$ et $c = 5$

Réponse : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 5 = 1 - 10 = -9$

$\Delta = -9$

II) Résolution des équations du second degré :

$a\,x^2 + b\,x + c = 0$ avec $a \neq 0$

Soit $a\,x^2 + b\,x + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4\,ac$ son discriminant.

L'existence de solutions pour l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ et la factorisation du polynôme dépendent du signe de Δ .

Si $\Delta > 0$	**Si $\Delta = 0$**	**Si $\Delta < 0$**
l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ **et** $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ **Le trinôme se factorise de la façon suivante :** $f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)$	**l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$:** $x_0 = \frac{-b}{2\,a}$ **Le trinôme se factorise de la façon suivante :** $f(x) = a\,(x - x_0)^2$	**l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$** **f n'est pas factorisable en produit de facteurs du premier degré à coefficients réels.**

Remarque : Lorsque l'équation admet une solution unique x_0 , c'est-à-dire lorsque $\Delta = 0$, on dit que x_0 est une solution double, car elle a deux fois la même solution et $f(x) = a\,(x - x_0)^2$.

Exemples : Déterminer si les polynômes suivants admettent des racines en utilisant le disciminant. si oui en donner une factorisation.

1) $f(x) = x^2 - x - 6$;

Réponse :

$f(x) = x^2 - x - 6$; $a = 1$ $b = -1$ et $c = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$

$\Delta = 25 > 0$ Le polynôme admet 2 racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1+5}{2} = 3$

–2 et 3 sont les deux racines.

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ on a donc une forme factorisée de la fonction f :

$\boldsymbol{f(x) = (x+2)(x-3)}$

2) $g(x) = 5x^2 - 40x + 35$;

Réponse : Tout d'abord factorisons par 5 car 5 ; -40 et 35 sont des multiples de 5

$g(x) = 5(x^2 - 8x + 7)$; $a = 1$ $b = -8$ et $c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (7) = 64 - 28 = 36$

$\Delta = 36 > 0$ le polynôme admet 2 racines : : $x_1 = \frac{8-\sqrt{36}}{2\times1} = \frac{8-6}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{8+\sqrt{36}}{2\times1} = \frac{8+6}{2} = 7$

1 et 7 sont les deux racines.

$g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ on a donc une forme factorisée de g : $\boldsymbol{g(x) = 5(x-1)(x-7)}$

3) $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$;

Réponse : $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$; $a = 9$ $b = -6$ et $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 36 - 36 = 0$

$\Delta = 0$

le polynôme admet une racine double $x_0 = \frac{-(-6)}{2\times9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

on a donc : $h(x) = a(x - x_0)^2$ on a donc une forme factorisée de h :

$h(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

4) $j(x) = x^2 - x + 1$

Réponse :

$a = 1$ $b = -1$ et $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

$\Delta = -3 < 0$ le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$ et donc n'est pas factorisable.