Forme canonique d'un polynome du second degré.

I) Définition de Fonction polynôme du second degré

Définition

On appelle fonction polynôme de degré 2 ou fonction trinôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = a x^2 + b x + c$ avec a, b et c réels et $a \neq 0$.

L'expression $f(x) = a x^2 + b x + c$ est la forme développée de f.

Les réels a, b et c sont les coefficients de la fonction f.

Exemples :

- Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$

f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 3$; $b = -5$ et $c = 2$

- Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

g est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$; $b = 0$ et $c = 0$

- Soit $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 4x$

h n'est pas une fonction polynôme du second degré car $a = 0$, h est une fonction affine.

II) Forme canonique

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$
Il existe deux réels α et β tel que : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$
avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$
Cette expression est appelé forme canonique de $f(x)$

Exemple : Déterminer la forme canonique de la fonction $f(x) = 2x^2 + 16x + 2$

Méthode 1 : On applique la formule directement :

$f(x) = 2x^2 + 16x + 2$ est un polynôme du second degré avec $a = 2$ $b = 16$ et $c = 2$, pour trouver sa forme canonique :

$\alpha = -\dfrac{16}{2 \times 2} = -4$ et $\beta = f(-4) = 2 \times (-4)^2 + 16 \times (-4) + 2 = 32 - 64 + 2 = -30$

Donc $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2(x + 4)^2 - 30$

$f(x) = 2(x + 4)^2 - 30$ est la forme canonique de f

Méthode 2 : On retrouve la forme canonique à partir des identités remarquables :

$f(x) = 2x^2 + 16x + 2$ est un polynôme du second degré avec $a = 2$, pour trouver sa forme canonique,

• Tout d'abord on factorise par a c'est-à-dire 2 dans cet exemple.
$f(x) = 2(x^2 + 8x + 1)$, ensuite nous allons maintenant considérer $x^2 + 8x$ comme étant le début de l'une des identités remarquables $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 4^2$$

On rajoute 4² pour compléter l'identité remarquable

On enlève 4² afin de ne pas modifier l'égalité

$x^2 + 8x = x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 4^2 = (x+4)^2 - 16$

• On remplace dans l'expression de la fonction f, $x^2 + 8x$ par $(x+4)^2 - 16$ et on obtient :
$f(x) = \mathbf{2(x^2 + 8x)} + 2 = \mathbf{2[(x+4)^2 - 4^2]} + 2 = 2(x+4)^2 - 2 \times 16 + 2 = 2(x+4)^2 - 30$
Cette écriture est la forme canonique avec $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{-4}$ **et** $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{-30}$

Remarque : on a bien : $f(-4) = 2(4^2 - 32 + 1) = -30 = \beta$

Exemple 2: Soit $f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2}$. Ecrire le trinôme $f(x)$ sous forme canonique**.**

On applique la formule :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2}$ $\qquad a = 1$; $b = -3$ et $c = \frac{3}{2}$

On calcule : $-\frac{b}{2a}$: $-\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$; donc $\alpha = \frac{3}{2}$

On calcule $f(\alpha) = f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^2 - 3 \times (\frac{3}{2}) + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{6}{4} = -\frac{3}{4}$

donc $\boldsymbol{\beta} = -\frac{3}{4}$

Donc : $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$ est la forme canonique de f

Sans appliquer la formule :
$f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2} = (x^2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = (x^2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{6}{4} = (x^2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{4}$ On retrouve le résultat.