Inéquation du second degré.

I) Discriminant

Le réel $b^2 - 4\,a\,c$ se note Δ et s'appelle le discriminant du trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$ ou du polynôme du second degré $a\,x^2 + b\,x + c$.

Exemples :

• Calculer le discriminant du trinôme $3\,x^2 - 5\,x + 1$ on a : $a = 3$; $b = -5$ et $c = 1$

Réponse : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 25 - 12 = 13$

$\Delta = 13$

• Calculer le discriminant de $\frac{1}{2}\,x^2 + x + 5$: on a : $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$ et $c = 5$

Réponse : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 5 = 1 - 10 = -9$

$\Delta = -9$

II) Résolution d'inéquations du second degré

Propriété :

Soit le trinôme $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, avec $a \neq 0$, et son discriminant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$
On obtient le signe de $f(x)$ en fonction des signes de a et de Δ :

<table>
<tr>
<td>si $\Delta > 0$</td>
<td>$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ d'après les résultats concernant le signe d'un produit de fonctions affines :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de $-a$</td><td>0</td><td>signe de a</td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>si $\Delta = 0$</td>
<td>$f(x) = a(x - x_0)^2$ alors :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td><td></td></tr>
</table>
Un carré étant toujours positif le signe dépend de celui de a.
</td>
</tr>
<tr>
<td>si $\Delta < 0$</td>
<td>$f(x)$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$ et
$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right]$ alors:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td></td></tr>
</table>
L'expression à l'intérieur des crochets est positif comme la somme de termes positifs.
</td>
</tr>
</table>

Exemples :
Etudier le signe des trinômes suivants :
$f(x) = -x^2 + x + 2$; $g(x) = 4x^2 + 4x + 1$; $h(x) = -3x^2 + x - 35$.

Réponses :

Pour f : $a = -1$ $b = 1$ $c = 2$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$ $\quad \boldsymbol{\Delta = 9}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{-2} = \frac{-1-3}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{-2} = \frac{-1+3}{-2} = -1$
le polynôme admet 2 racines – 1 et 2 et on a : $f(x) = -(x+1)(x-2)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x) = -x^2 + x + 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Comme $a < 0$ donc on a $f(x) < 0$ sur $]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$ et $f(x) > 0$ sur $]-1 ; 2[$

Pour g : $\Delta = 0$
Le polynôme admet une racine $-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x) = 4x^2 + 4x + 1$		$+$	0	$+$	

et on a $g(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ donc $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

Pour h :
$\Delta = -419 < 0$ le polynôme n'a pas de racine.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x) = -3x^2 + x - 35$		$-$	

le polynôme n'admet aucune racine et $a < 0$ donc $h(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$

2) Inéquation du second degré

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme du second degré.

On appelle inéquation du second degré à une inconnue toute inéquation de la forme :
$P(x) > 0$ **;** $P(x) < 0$ **;** $P(x) \geq 0$ **ou** $P(x) \leq 0$

Exemple 1 : Résoudre l'inéquation suivante :

$4x^2 + 8x - 252 > 0$

Tout d'abord calculons le discriminant Δ

$\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times (-252) = 4\,096$

$\Delta > 0$ $4x^2 + 8x - 252$ admet deux racines : $x_1 = \frac{-8+\sqrt{4096}}{2\times4}$ et $x_2 = \frac{-8-\sqrt{4096}}{2\times4}$

$x_1 = \frac{-8+64}{8}$ et $x_2 = \frac{-8-64}{8}$

$x_1 = \frac{56}{8}$ et $x_2 = \frac{-72}{8}$ **donc $x_1 = 7$ et $x_2 = -9$**

Les deux racines du polynôme sont −9 et 7, le signe du a qui est 4 est positif, nous avons donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-9		7		$+\infty$
$4x^2 + 8x - 252$		+	0	−	0	+	

Les solutions de l'inéquations $4x^2 + 8x - 252 > 0$ sont donc : S =] −∞ ; 9 [∪] 7 ; +∞ [

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation suivante :

$-12x^2 + 36x - 27 > 0$

Tout d'abord calculons le discriminant Δ

$\Delta = 36^2 - 4 \times (-27) \times (-12) = 0$

$\Delta = 0$, donc $-12x^2 + 36x - 27$ admet une seule racine $x_0 = \frac{-36}{2\times(-12)} = \frac{-36}{-24} = 1{,}5$

Le signe de a est négatif (-12), nous avons donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		−	0	−	

Quel que soit $\in \mathbb{R}$, $\mathbf{-12x^2 + 36x - 27 < 0}$ **Les solutions de l'inéquations** $\mathbf{-12x^2 + 36x - 27 > 0}$ **sont :** $S = \{\emptyset\}$

Exemple 3 : Résoudre l'inéquation suivante : $7x^2 - 5x + 4 > 0$

Tout d'abord calculons le discriminant Δ

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 7 \times 4 = -87 < 0$

donc $7x^2 - 5x + 4$ n'admet aucune racine. Le signe de a (7) est positif on a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $7x^2 - 5x + 4 > 0$ donc **Les solutions de l'inéquations $7x^2 - 5x + 4 > 0$ sont : S =** $\mathbb{R}$

IV) Représentation graphique d'un trinôme du second degré

La représentation graphique d'un polynôme du second degré est appelé parabole.

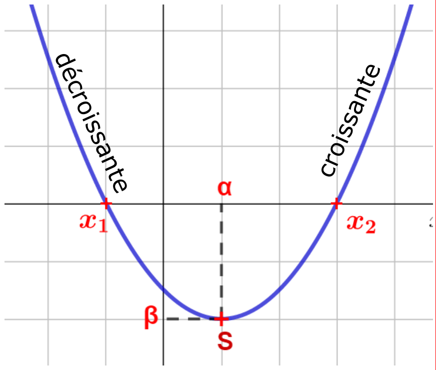
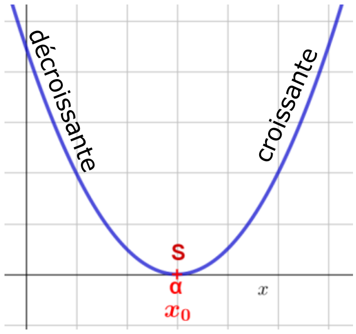
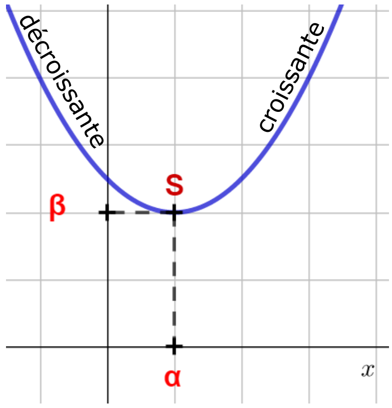
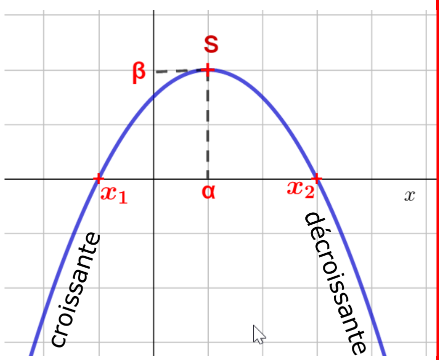
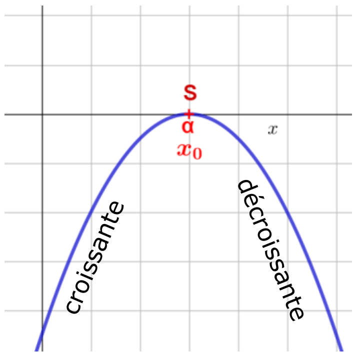
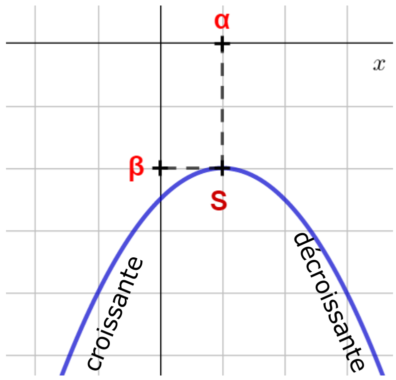
	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Tableau de variation d'un polynôme du second degré :

$a > 0$	$a < 0$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗ β ↘</td></tr></table>	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α $+\infty$</td></tr><tr><td>f (x)</td><td>↗ β ↘</td></tr></table>

Démonstration :

Soit f un polynôme du second degré. On peut écrire f sous sa forme canonique :

$\boldsymbol{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$ avec a non nul

Supposons $\mathbf{a > 0}$	
Soit c, d deux réels sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ tel que : $\boldsymbol{c < d}$	Soit c, d deux réels sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ tel que : $\boldsymbol{c < d}$
$c - \alpha < d - \alpha$ Or $c - \alpha < 0$ et $d - \alpha < 0$ donc	$c - \alpha < d - \alpha$ Or, $c - \alpha > 0$ et $d - \alpha > 0$ donc
$(c - \alpha)^2 > (d - \alpha)^2$	$(c - \alpha)^2 < (d - \alpha)^2$
Comme $a > 0$:	Comme $a > 0$:
$a(c - \alpha)^2 > a(d - \alpha)^2$ donc	$a(c - \alpha)^2 < a(d - \alpha)^2$ donc
$a(c - \alpha)^2 + \beta > a(d - \alpha)^2 + \beta$ donc	$a(c - \alpha)^2 + \beta < a(d - \alpha)^2 + \beta$ donc
$\boldsymbol{f(c) > f(d)}$	$\boldsymbol{f(c) < f(d)}$
$\boldsymbol{f}$ est donc une fonction décroissante sur$]-\infty; \alpha]$	$\boldsymbol{f}$ est donc une fonction croissante sur$[\alpha; +\infty[$

Supposons $a < 0$	
Soit c, d deux réels sur l’intervalle $]-\infty;\ \alpha]$ tel que : $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{d}$ $c - \alpha < d - \alpha$ Or $c - \alpha < 0$ et $d - \alpha < 0$ donc $(c - \alpha)^2 > (d - \alpha)^2$ Comme $a < 0$: $a(c - \alpha)^2 < a(d - \alpha)^2$ donc $a(c - \alpha)^2 + \beta < a(d - \alpha)^2 + \beta$ donc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d})$ $\boldsymbol{f}$ est donc une fonction croissante sur$]-\infty;\ \alpha]$	Soit c, d deux réels sur l’intervalle $[\alpha;\ +\infty[$ tel que : $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{d}$ $c - \alpha < d - \alpha$ Or, $c - \alpha > 0$ et $d - \alpha > 0$ donc $(c - \alpha)^2 < (d - \alpha)^2$ Comme $a < 0$: $a(c - \alpha)^2 > a(d - \alpha)^2$ donc $a(c - \alpha)^2 + \beta > a(d - \alpha)^2 + \beta$ donc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d})$ $\boldsymbol{f}$ est donc une fonction décroissante sur$[\alpha;\ +\infty[$

De plus , en tenant compte du signe du discriminant :

$\Delta > 0$ la fonction ayant deux racines distincts la représentation graphique coupe l’axe des abscisses, aux points d’abscisses $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, la fonction ayant une racine double, la représentation graphique coupe l’axe des abscisses, au point d’abscisse $x_0 = a = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta > 0$, la fonction n’ayant pas de racine, la représentation graphique ne coupejamais l’axe des abscisses.