Polynome du second degré.

I) Fonction polynôme du second degré

1) Définition

On appelle fonction polynôme de degré 2 ou fonction trinôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = a x^2 + b x + c$ avec a, b et c réels et $a \neq 0$.

L'expression $f(x) = a x^2 + b x + c$ est la forme développée de f.

Les réels a, b et c sont les coefficients de la fonction f.

Exemples :

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$

f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 3$; $b = -5$ et $c = 2$

- Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto x^2$

g est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$; $b = 0$ et $c = 0$

- Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto 4x$

h n'est pas une fonction polynôme du second degré car $a = 0$, h est une fonction affine.

2) Racines d'un polynôme

Soit f une fonction polynôme du second degré. Les racines du polynôme si elles existent sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

Exemples :

Exemple 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 3x$

f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 9$ $b = 3$ et $c = 0$

$f(x) = 0$ si et seulement si $9x^2 + 3x = 0$

si et seulement si $3x(3x + 1) = 0$

si et seulement si $x = 0$ ou $3x + 1 = 0$

si et seulement si $x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$

S = $\left\{0 ; -\frac{1}{3}\right\}$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 0 et $-\frac{1}{3}$, ce qui veut dire que **0 et $-\frac{1}{3}$ sont les racines de $9x^2 + 3x$**

Exemple 2 : g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 2x + 1$

g est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$ $b = -2$ et $c = 1$

$g(x) = 0$ si et seulement si $x^2 - 2x + 1$=0 nous reconnaissons une identité remarquable à factoriser :

$x^2 - 2x + 1$=0 si et seulement si $(x-1)^2 = 0$ si et seulement si $x - 1 = 0$

si et seulement si $x = 1$

S = $\{1\}$, ce qui veut dire que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$, on dit que **1 est la racine double de $\boldsymbol{x^2 - 2x + 1}$.**

Exemple 3 : h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 3$

h est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$ $b = 0$ et $c = 3$

$h(x) = 0$ si et seulement si $x^2 + 3$ =0

si et seulement si $x^2 + 3 = 0$

si et seulement si $x^2 = -3$

Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
ce qui veut dire que $\boldsymbol{x^2 + 3}$ **n'a pas de racine .**

3) Factorisation d'un polynôme

Soit f une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) ayant deux racines distinctes x_1 et x_2. Alors f peut s'écrire sous forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemples :

Exemple 1 : Soit f une fonction polynome de degré 2 dont les racines sont 2 et 5 tel que $f(0) = 20$. Déterminez l'expression factorisée de f

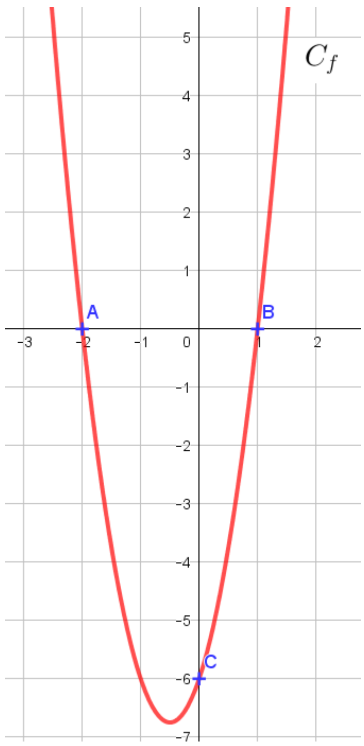
f une fonction polynome de degré 2 dont les racines sont 2 et 5 alors une expression factorisée de f est : $f(x) = a(x-2)(x-5)$ $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

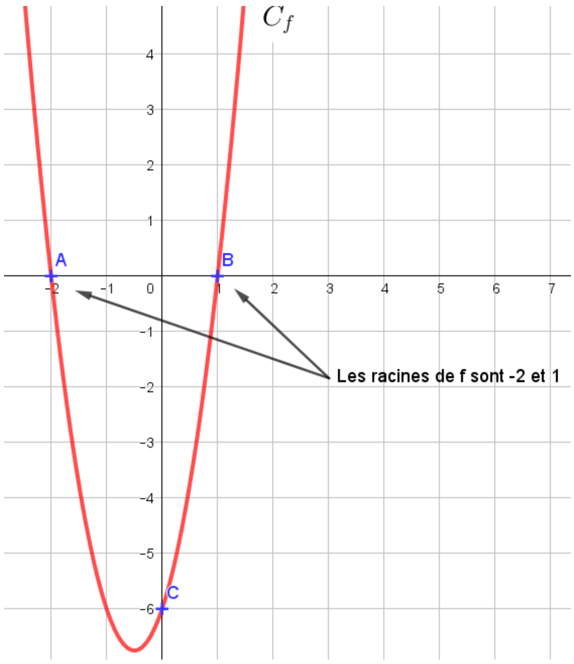
Si de plus nous voulons que $f(0) = 20$ alors il suffit de remplacer x par 0 dans l'expression $f(x) = a(x-2)(x-5)$, $f(0) = a(0-2)(0-5) = 10a$

$10a = 20$ donc $a = \frac{20}{10} = 2$

L'expression factorisée de f est : $f(x) = 2(x-2)(x-5)$

Exemple 2 : Déterminez l'expression factorisée de f dont la représentation graphique est ci-dessous :





Par lecture graphique , les racines de f sont -2 et 1 alors une expression factorisée de f est :

$f(x) = a(x+2)(x-1)$ $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

De plus le point $C(0\,;\,-6) \in C_f$ donc $f(0) = -6$

On remplace x par 0 dans l'expression $f(x) = a(x+2)(x-1)$

$$f(0) = -2a = -6$$

Donc $a = 3$ et la forme factorisée de f est :

$$\boldsymbol{f(x) = 3(x+2)(x-1)}$$

4) Propriétés de la somme et du produit des racines d'un polynôme du second degré:

Si le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 distinctes ou confondues, alors :

leur somme $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

leur produit $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

La fonction peut s'écrire sous la forme : $f(x) = a(x^2 - Sx + P)$

Exemples :

Exemple 1 : Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$

a. Trouver une racine évidente de f

b. Déterminer l'autre racine en appliquant les propriétés de la somme et du produit des racines puis factoriser $f(x)$.

a. $f(1) = 3 \times (1)^2 - 5 \times (1) + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$ donc 1 est une racine évidente de f

b. $x_1 = 1$ et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ donc $1 + x_2 = -\frac{-5}{3}$ $1 + x_2 = \frac{5}{3}$ $x_2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ L'autre racine est $\frac{2}{3}$

$x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{2}{3}$ donc $f(x). = 3(x-1)(x-\frac{2}{3})$

Exemple 2 : f est une fonction polynome du second degré admettant -1 pour racine et dont le produit des racines est 10 :

1. Déterminez sous forme factorisée **une** expression de $f(x)$
2. Déterminez **la** forme développée de $f(x)$ sachant que $f(1) = 44$

1 . On sait que $x_1 = -1$ et $x_1 \times x_2 = 10$ donc $x_2 = -10$ donc $f(x) = a(x+1)(x+10)$ avec $a \neq 0$

2. $f(x) = a(x^2 - Sx + P)$ avec $S = -1 + (-10) = -11$ et $P = 10$

Donc $f(x) = a(x^2 + 11x + 10)$ or, $f(1) = 44$ $f(1) = a(1 + 11 + 10) = 22a$ donc $22a = 44$ donc $a = 2$

Donc $f(x) = 2(x^2 + 11x + 10) = 2x^2 + 22x + 20$ La forme développée est $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 + 22x + 20}$

II) Résolution d'équation du second degré :

$ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

1) Forme canonique

Soit f une fonction polynôme de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$
Il existe deux réels α et β tel que : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$
Cette expression est appelé forme canonique de $f(x)$

Exemple : Déterminer la forme canonique de la fonction $f(x) = 2x^2 + 16x + 2$

Méthode 1 : On applique la formule directement :

$f(x) = 2x^2 + 16x + 2$ est un polynôme du second degré avec $a = 2$ $b = 16$ et $c = 2$, pour trouver sa forme canonique :

$\alpha = -\dfrac{16}{2 \times 2} = -4$ **et** $\beta = f(-4) = 2 \times (-4)^2 + 16 \times (-4) + 2 = 32 - 64 + 2 = -30$

Donc $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 2(x+4)^2 - 30$

$f(x) = 2(x+4)^2 - 30$ est la forme canonique de f

Méthode 2 : On retrouve la forme canonique à partir des identités remarquables :

$f(x) = 2x^2 + 16x + 2$ est un polynôme du second degré avec $a = 2$, pour trouver sa forme canonique,

• Tout d'abord on factorise par a c'est-à-dire 2 dans cet exemple.
$f(x) = 2(x^2 + 8x + 1)$, ensuite nous allons maintenant considérer $x^2 + 8x$ comme étant le début de l'une des identités remarquables $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 4^2$$

On rajoute 4² pour compléter l'identité remarquable

On enlève 4² afin de ne pas modifier l'égalité

$x^2 + 8x = x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 4^2 = (x+4)^2 - 16$

• On remplace dans l'expression de la fonction f, x^2+8x par $(x+4)^2-16$ et on obtient :
$f(x) = \mathbf{2(x^2+8x)}+2 = \mathbf{2[(x+4)^2-4^2]}+2 = 2(x+4)^2-2\times 16+2 = 2(x+4)^2-30$

Cette écriture est la forme canonique avec $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{-4}$ **et** $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{-30}$

Remarque : on a bien : $f(-4) = 2(4^2-32+1) = -30 = \beta$

Exemple 2: Soit $f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2}$. Ecrire le trinôme $f(x)$ sous forme canonique.

On applique la formule :

$f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2}$ $\quad$ $a = 1$; $b = -3$ et $c = \frac{3}{2}$

On calcule : $-\frac{b}{2a}$: $-\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$; donc $\alpha = \frac{3}{2}$

On calcule $f(\alpha) = f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^2 - 3\times(\frac{3}{2}) + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{6}{4} = -\frac{3}{4}$

donc $\boldsymbol{\beta} = -\frac{3}{4}$

Donc : $f(x) = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$ est la forme canonique de f

Sans appliquer la formule :

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{3}{2} = (x^2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = (x^2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{6}{4} = (x^2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{4}$ On retrouve le résultat.

2) Discriminant

Le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ et s'appelle le discriminant du trinôme ax^2+bx+c ou du polynôme du second degré ax^2+bx+c.

Exemples :

• Calculer le discriminant du trinôme $3x^2 - 5x + 1$ $\quad$ on a : $a = 3$; $b = -5$ et $c = 1$

Réponse : $\Delta = b^2-4ac = (-5)^2 - 4\times 3\times 1 = 25-12 = 13$
$\Delta = 13$

• Calculer le discriminant de $\frac{1}{2}x^2 + x + 5$: $\quad$ on a : $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$ et $c = 5$

Réponse : $\Delta = b^2-4ac = 1^2 - 4\times\frac{1}{2}\times 5 = 1-10 = -9$
$\Delta = -9$

3) Résolution des équations du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

L'existence de solutions pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la factorisation du polynôme dépendent du signe de Δ .

Si $\Delta > 0$	**Si $\Delta = 0$**	**Si $\Delta < 0$**
l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ **admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$:** $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ **Le trinôme se factorise de la façon suivante :** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	**l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$ **admet une solution unique dans $\mathbb{R}$:** $x_0 = \frac{-b}{2a}$ **Le trinôme se factorise de la façon suivante :** $f(x) = a(x - x_0)^2$	**l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$ **n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$** f **n'est pas factorisable en produit de facteurs du premier degré à coefficients réels.**

Remarque : Lorsque l'équation admet une solution unique x_0 , c'est-à-dire lorsque $\Delta = 0$, on dit que x_0 est une solution double, car elle a deux fois la même solution et $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Exemples : Déterminer si les polynômes suivants admettent des racines en utilisant le discriminant. si oui en donner une factorisation.

1) $f(x) = x^2 - x - 6$; 2) $g(x) = 5x^2 - 40x + 35$;
3) $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$; 4) $j(x) = x^2 - x + 1$;

Réponses :

1) $f(x) = x^2 - x - 6$; $a = 1$ $b = -1$ et $c = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$

$\Delta = 25 > 0$ Le polynôme admet 2 racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{1+5}{2} = 3$

-2 et 3 sont les deux racines.

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ on a donc une forme factorisée de la fonction f : $\boldsymbol{f(x) = (x + 2)(x - 3)}$

2) $g(x) = 5x^2 - 40x + 35$

Tout d'abord factorisons par 5 car 5 ; -40 et 35 sont des multiples de 5

$g(x) = 5(x^2 - 8x + 7)$; $a = 1$ $b = -8$ et $c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (7) = 64 - 28 = 36$

$\Delta = 36 > 0$ le polynôme admet 2 racines : : $x_1 = \frac{8-\sqrt{36}}{2\times 1} = \frac{8-6}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{8+\sqrt{36}}{2\times 1} = \frac{8+6}{2} = 7$

1 et 7 sont les deux racines.

$g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ on a donc une forme factorisée de g : $\boldsymbol{g(x) = 5(x - 1)(x - 7)}$

3) $h(x) = 9x^2 - 6x + 1$; $a = 9$ $b = -6$ et $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 36 - 36 = 0$

$\Delta = 0$

le polynôme admet une racine double $x_0 = \frac{-(-6)}{2\times9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

on a donc : $h(x) = a(x - x_0)^2$

$h(x) = 9\,(x - \frac{1}{3})^2$

4) $j\,(x) = x^2 - x + 1$ $a = 1$ $b = -1$ et $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

$\Delta = -3 < 0$ **le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$ et donc n'est pas factorisable.**

III) Signe du trinôme. Inéquations

1) Signe du trinôme

Propriété :

Soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
On obtient le signe de $f(x)$ en fonction des signes de a et de Δ :

si $\Delta > 0$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ **d'après les résultats concernant le signe d'un produit de fonctions affines :**

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		**signe de a**	0	**signe de $-a$**	0	**signe de a**	

si $\Delta = 0$

$f(x) = a(x - x_0)^2$ **alors :**

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		**signe de a**	0	**signe de a**	

Un carré étant toujours positif le signe dépend de celui de a.

si $\Delta < 0$

$f(x)$ **n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$ et**

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ **alors:**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		**signe de a**	

L'expression à l'intérieur des crochets est positif comme la somme de termes positifs.

Exemples :
Etudier le signe des trinômes suivants :
$f(x) = -x^2 + x + 2$; $g(x) = 4x^2 + 4x + 1$; $h(x) = -3x^2 + x - 35$.

Réponses :

Pour f : $a = -1$ $b = 1$ $c = 2$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$ $\boldsymbol{\Delta = 9}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{-2} = \frac{-1-3}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{-2} = \frac{-1+3}{-2} = -1$
le polynôme admet 2 racines – 1 et 2 et on a : $f(x) = -(x+1)(x-2)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x) = -x^2 + x + 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Comme $a < 0$ donc on a $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ et $f(x) > 0$ sur $]-1\,;2[$

Pour g : $\Delta = 0$
Le polynôme admet une racine $-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x) = 4x^2 + 4x + 1$		$+$	0	$+$	

et on a $g(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ donc $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

Pour h :
$\Delta = -419 < 0$ le polynôme n'a pas de racine.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x) = -3x^2 + x - 35$		$-$	

le polynôme n'admet aucune racine et $a < 0$ donc $h(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$

2) Inéquation du second degré

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme du second degré.

On appelle inéquation du second degré à une inconnue toute inéquation de la forme :
$P(x) > 0$ **;** $P(x) < 0$ **;** $P(x) \geq 0$ **ou** $P(x) \leq 0$

Exemple 1 : Résoudre l'inéquation suivante :

$4x^2 + 8x - 252 > 0$

Tout d'abord calculons le discriminant Δ

$\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times (-252) = 4\,096$

$\Delta > 0$ $4x^2 + 8x - 252$ admet deux racines : $x_1 = \frac{-8+\sqrt{4096}}{2\times4}$ et $x_2 = \frac{-8-\sqrt{4096}}{2\times4}$

$x_1 = \frac{-8+64}{8}$ et $x_2 = \frac{-8-64}{8}$

$x_1 = \frac{56}{8}$ et $x_2 = \frac{-72}{8}$ **donc $x_1 = 7$ et $x_2 = -9$**

Les deux racines du polynôme sont -9 et 7, le signe du a qui est 4 est positif, nous avons donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-9		7		$+\infty$
$4x^2 + 8x - 252$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquations $4x^2 + 8x - 252 > 0$ sont donc : S =] $-\infty$; 9 [∪] 7 ; $+\infty$ [

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation suivante :

$-12x^2 + 36x - 27 > 0$

Tout d'abord calculons le discriminant Δ

$\Delta = 36^2 - 4 \times (-27) \times (-12) = 0$

$\Delta = 0$, donc $-12x^2 + 36x - 27$ admet une seule racine $x_0 = \frac{-36}{2\times(-12)} = \frac{-36}{-24} = 1{,}5$

Le signe de a est négatif (-12), nous avons donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Quel que soit $\in \mathbb{R}, -12x^2 + 36x - 27 < 0$ Les solutions de l'inéquations $-12x^2 + 36x - 27 > 0$ sont : $S = \{\emptyset\}$

Exemple 3 : Résoudre l'inéquation suivante : $7x^2 - 5x + 4 > 0$

Tout d'abord calculons le discriminant Δ

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 7 \times 4 = -87 < 0$

donc $7x^2 - 5x + 4$ n'admet aucune racine. Le signe de a (7) est positif on a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Quelque soit $x \in \mathbb{R}, 7x^2 - 5x + 4 > 0$ donc **Les solutions de l'inéquations $7x^2 - 5x + 4 > 0$ sont : S = $\mathbb{R}$**

IV) Représentation graphique d'un trinôme du second degré

La représentation graphique d'un polynôme du second degré est appelé parabole.

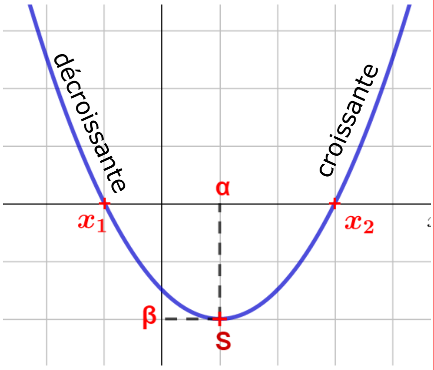
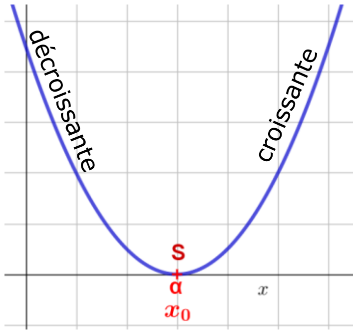
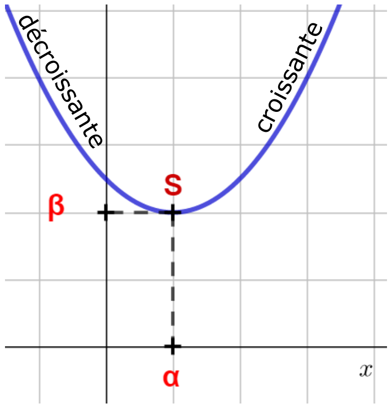
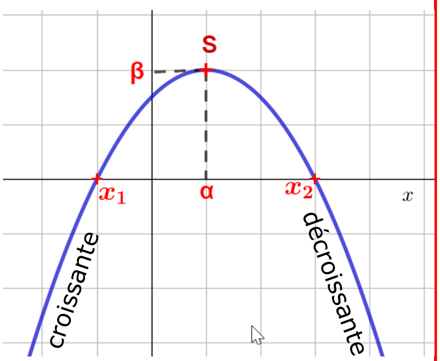
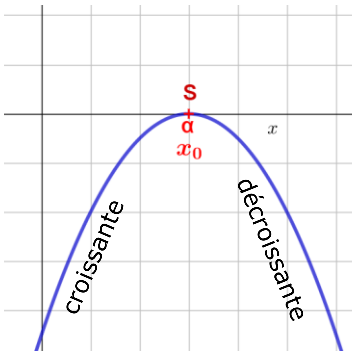
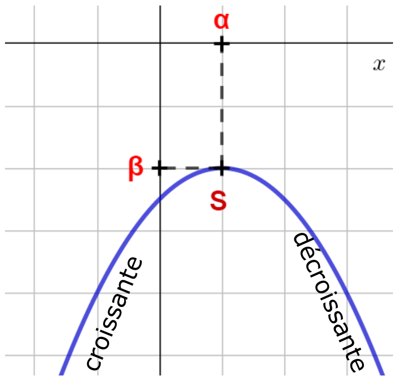
	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Tableau de variation d'un polynôme du second degré :

$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

Démonstration :

Soit f un polynôme du second degré. On peut écrire f sous sa forme canonique :

$\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$ avec a non nul

<table>
<tr><th colspan="2">Supposons $\mathbf{a > 0}$</th></tr>
<tr>
<td>Soit c, d deux réels sur l'intervalle $]-\infty;\ \alpha]$ tel que : $\boldsymbol{c < d}$
$c-\alpha < d-\alpha$ Or $c-\alpha < 0$ et $d-\alpha < 0$ donc
$(c-\alpha)^2 > (d-\alpha)^2$
Comme $a > 0$:
$a(c-\alpha)^2 > a(d-\alpha)^2$ donc
$a(c-\alpha)^2 + \beta > a(d-\alpha)^2 + \beta$ donc
$\boldsymbol{f(c) > f(d)}$
$\boldsymbol{f}$ est donc une fonction décroissante sur$]-\infty;\ \alpha]$</td>
<td>Soit c, d deux réels sur l'intervalle $[\alpha;\ +\infty[$ tel que : $\boldsymbol{c < d}$
$c-\alpha < d-\alpha$ Or, $c-\alpha > 0$ et $d-\alpha > 0$ donc
$(c-\alpha)^2 < (d-\alpha)^2$
Comme $a > 0$:
$a(c-\alpha)^2 < a(d-\alpha)^2$ donc
$a(c-\alpha)^2 + \beta < a(d-\alpha)^2 + \beta$ donc
$\boldsymbol{f(c) < f(d)}$
$\boldsymbol{f}$ est donc une fonction croissante sur$[\alpha;\ +\infty[$</td>
</tr>
</table>

Supposons $\mathbf{a < 0}$	
Soit c, d deux réels sur l'intervalle $]-\infty;\, \alpha]$ tel que : $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{d}$ $c - \alpha < d - \alpha$ Or $c - \alpha < 0$ et $d - \alpha < 0$ donc $(c - \alpha)^2 > (d - \alpha)^2$ Comme $a < 0$: $a(c - \alpha)^2 < a(d - \alpha)^2$ donc $a(c - \alpha)^2 + \beta < a(d - \alpha)^2 + \beta$ donc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d})$ $\boldsymbol{f}$ est donc une fonction croissante sur$]-\infty;\, \alpha]$	Soit c, d deux réels sur l'intervalle $[\alpha;\, +\infty[$ tel que : $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{d}$ $c - \alpha < d - \alpha$ Or, $c - \alpha > 0$ et $d - \alpha > 0$ donc $(c - \alpha)^2 < (d - \alpha)^2$ Comme $a < 0$: $a(c - \alpha)^2 > a(d - \alpha)^2$ donc $a(c - \alpha)^2 + \beta > a(d - \alpha)^2 + \beta$ donc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d})$ $\boldsymbol{f}$ est donc une fonction décroissante sur$[\alpha;\, +\infty[$

De plus , en tenant compte du signe du discriminant :

$\Delta > 0$ la fonction ayant deux racines distincts la représentation graphique coupe l'axe des abscisses, aux points d'abscisses $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, la fonction ayant une racine double, la représentation graphique coupe l'axe des abscisses, au point d'abscisse $x_0 = a = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta > 0$, la fonction n'ayant pas de racine, la représentation graphique ne coupejamais l'axe des abscisses.