Suites numériques

I) Définition

On compte des objets. Compter, c'est associer à des entiers naturels un objet d'une collection donnée.

Exemple 1 : Les Louis constituent une suite de rois de France.

Il s'agit d'une application de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$ dans l'ensemble des rois de France.

Exemple 2 : Une suite logique comme : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ….

Exemple 3 :

On peut ainsi définir de très nombreuses suites, en fait, dès que l'on compte une collection d'objets, on fabrique une suite :

- Les concurrents d'une course avec leurs numéros de dossards ;
- Les concurrents de la même course avec leur ordre d'arrivée ;
- Les cartes dans un jeu ;
- Des nombres, comme les décimales d'un nombre donné ;
- Des nombres encore avec des échéances mensuelles comme un loyer, un salaire.

En général, dans les classes de lycée, on appellera « suite » ou « suite numérique » et on notera $(u_n)_{n\geq n_0}$ la collection où, pour tout entier $n \geq n_0$, tout objet u_n est un nombre. Le plus souvent, on s'intéressera aux cas où la collection possède une infinité de termes.

Définition

• Une suite est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ qui, a un entier naturel n, associe $u(n)$ noté u_n

• u_n est le terme de rang n (ou d'indice n)

• u_{n+1} est le terme qui suit le terme u_n

• Si pour tout $n \geq n_0$ on a la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ alors dans ce cas : u_{n_0} est le premier terme de la suite

Si $n_0 = 0$ alors u_0 est le premier terme

• Dans un repère, la représentation graphique de la suite u est l'ensemble des points A_n de coordonnées (n ; u_n)

Remarque : Une suite (u_n) peut n'être définie qu'à partir d'un rang 1. Dans ce cas, la suite est définie dans $\mathbb{N}^*$ et sa valeur initiale est u_1

Exemple 1 : On définit la suite (u_n) par : $u_n = \frac{1}{n}$

Cette suite est définie sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire pour tout entier naturel $n \geq 1$

u est une application de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}^+$

$$u : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$$
$$n \mapsto \frac{1}{n}$$

Son premier terme est u_1

$u_1 = u(1) \ \frac{1}{1} = 1$ *On remplace n par 1 dans l'expression*

$u_2 = u(2) = \frac{1}{2}$ *On remplace n par 2 dans l'expression*

$u_3 = u(3) = \frac{1}{3}$ *On remplace n par 3 dans l'expression*

Exemple 2 : On définit la suite (u_n) par : $u_n = \frac{1}{n-3}$ pour les entiers naturels strictement supérieur à 3.

Cette suite est définie pour tout $n \geq 4$, u est une application de l'ensemble :

$\{n \in \mathbb{N} \ / n \geq 4\}$ vers $\mathbb{R}^+$

Son premier terme est u_4

$u_4 = u(4) = \frac{1}{4-3} = 1$ *On remplace n par 4 dans l'expression*

$u_5 = u(5) = \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2}$ *On remplace n par 5 dans l'expression*

$u_6 = u(6) = \frac{1}{6-3} = \frac{1}{3}$ *On remplace n par 6 dans l'expression* etc ….

II) Modes de génération d'une suite numérique

1) Définir une suite par une formule explicite

a) Cas général :

On peut calculer directement chacun des termes d'une suite par la donnée d'une formule explicite de $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$

Exemple 1 : On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = (-1)^n$

Alors $u_0 = (-1)^0 = 1$ $u_1 = (-1)^1 = -1$ $u_{1000} = (-1)^{1000} = 1$ $u_{1997} = (-1)^{1997} = -1$

Exemple 2 : On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $v_n = 2n + 5$

Alors $v_0 = 2 \times 0 + 5 = 5$ $v_1 = 2 \times 1 + 5 = 7$

$v_2 = 2 \times 2 + 5 = 9$ $v_3 = 2 \times 3 + 5 = 11$

b) Cas particulier : Avec une fonction

Une suite définie par une fonction est une suite de la forme : $u_n = f(n)$

Exemple : On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = n^2 - 3n + 1$

Il existe une fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ tel que $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

On a donc : $u_n = f(n) = n^2 - 3n + 1$ alors

$u_0 = f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$;

$u_1 = f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 1 = -1$;

$u_2 = f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = -1$;

$u_3 = f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 1$;

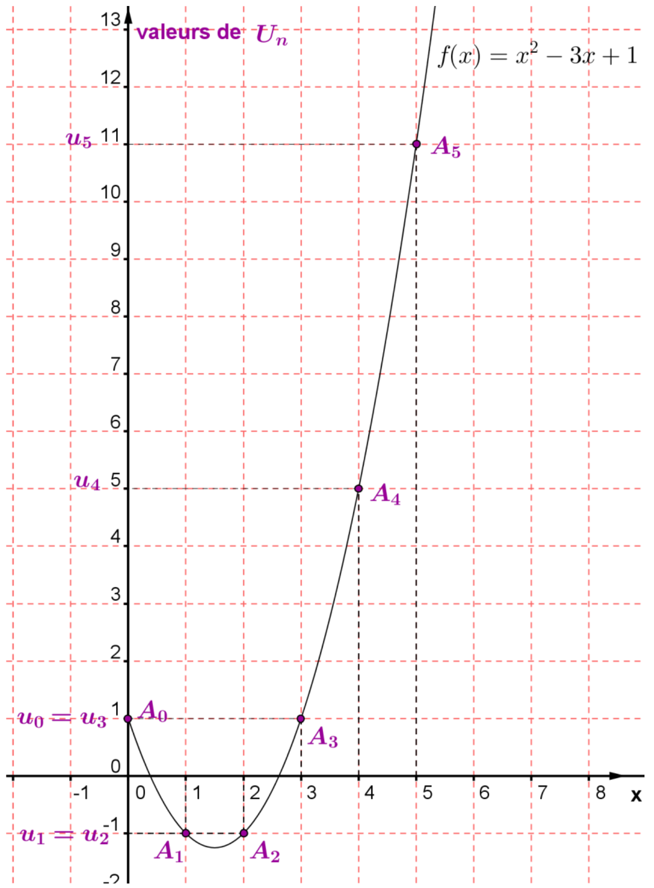
$u_4 = 4^2 - 3 \times 4 + 1 = 5$;

La représentation graphique de la suite $\boldsymbol{u}$ est l'ensemble des points de coordonnées (n ; u_n)

(0 ; 1) ; (1 ; −1) ; (2 ; − 1) ; (3 ; 1)

(4 ; 5)

Une representation graphique de la suite u :



2) Définir une suite par une relation de récurrence

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On définit une suite en posant pour tout entier naturel n $u_{n+1} = f(u_n)$

La valeur de u_0 ou u_{n_0} est donnée. On l'appelle « terme initial ».

Remarques : La formule n'est pas explicite, on calcule chaque terme de la suite en fonction du terme précédent

Contrairement à une formule explicite, une relation de récurrence ne permet pas de calculer un terme de rang donné sans avoir calculé tous les termes précédents.

Exemple 1 :

Soit la suite (U_n), définie pour tout n ≥ 1 par $u_{n+1} = \ 2u_n + 3$ avec $u_0 = 2$

Pour calculer u_2 il faut connaitre u_1, pour calculer u_3 il faut connaitre u_2 et ainsi de suite.

Si on remplace n par 0 dans l'expression alors on a :

$u_{0+1} = \ 2u_0 + 3$ et donc :

$u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$

Si on remplace n par 1 dans l'expression alors on a $u_{1+1} = \ 2u_1 + 3$ et donc :

$u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 7 + 3 = 17$ et ainsi de suite.

Exemple 2 : Soit la suite (U_n), définie pour tout n ≥ 1 par $u_{n+1} = {u_n}^2 - 3u_n + 1$ avec $u_0 = 1$

Si on remplace n par 0 dans l'expression alors on a :

$u_{0+1} = \ {u_0}^2 - 3u_0 + 1$ et donc :

$u_1 = 1^2 - 3 \times 1 + 1 = -1$ $\qquad u_1 = -1$

Si on remplace n par 1 dans l'expression alors on a $u_{1+1} = \ {u_1}^2 - 3u_1 + 1$ et donc :

$u_2 = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 1 = 5$ $\qquad u_2 = 5$ $\qquad$ et ainsi de suite.

Programme Python pour calculer les termes d'une suite récurrente :

Soit la suit $u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 2$ avec $u_0 = 0$
Le programme qui permet de calculer u_{50} est :

```
u=0
for i in range(1,51) :

    u=0,5*u+2
print(u)
```

1 est inclus et 51 est exclus , la dernière valeur de i est 50

Ce programme par exemple permet de calculer u_{50}

4) Générer une suite par un algorithme :

La suite (u_n) est définie par son premier terme et les instructions d'une boucle qui permettent de calculer les termes suivants.

Exemple :

A ⇠1

Pour i variant de 1 à N

    A⇠3×A+4

Fin du Pour

Cet algorithme permet de calculer les différents termes d'une suite :

u_0 est donné par la valeur de A qui est 1

$u_1 = 3u_0 + 4 = 3 \times 1 + 4 = 7$

$u_2 = 3u_1 + 4 = 3 \times 7 + 4 = 25$

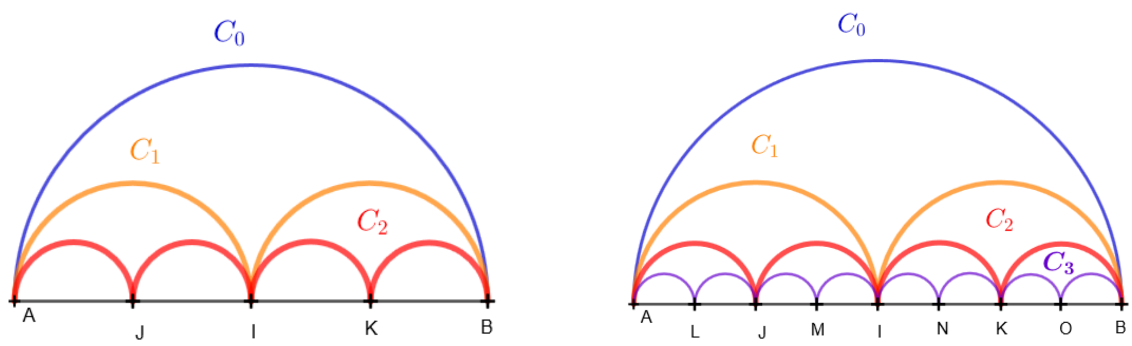
Après N étapes de la boucle la variable A contient le terme u_n

4) Générer une suite par des motifs géométriques

Dans une figure où un motif particulier se répète, on définit une suite (u_n) comme une quantité géométrique (longueur, angle, aire …).

Exemple : Les lunules de la figure ci-dessous, construites à l'aide des demi-cercles permettent d'étudier quelques processus itératifs :

Dans la figure ci-dessous AB = 8 cm les points I, J, K sont les milieux respectifs des segments [AB] ; [IA] ; [IB]. C_0 ; C_1 et C_2 sont les courbes dessinés en bleu, en orange et rouge :



On peut ainsi continuer en traçant la courbe C_3 à partir des milieux respectifs des segments [AJ] ; [JI] ; [IK] et [KB] :

On peut ainsi continuer en coupant encore en deux les derniers segments tracés ….

On définit ainsi différentes suites

Par exemple les rayons des demi-cercles :

$r_0 = 8 \div 2 = 4$

$r_1 = 4 \div 2 = 2$

$r_2 = 2 \div 2 = 1$

$r_3 = 1 \div 2 = 0,5$

Ainsi si nous continuons ainsi la figure nous obtenons la relation :

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $r_{n+1} = r_n \div 2$

On pourrait aussi définir la suite ℓ_n qui représente les longueurs des courbes ou la suite a_n qui représente les aires des courbes…

III) Représentation graphique des suites

1) Définition

Dans un repère, la représentation graphique de la suite u est l'ensemble des points A_n de coordonnées $(n ; u_n)$

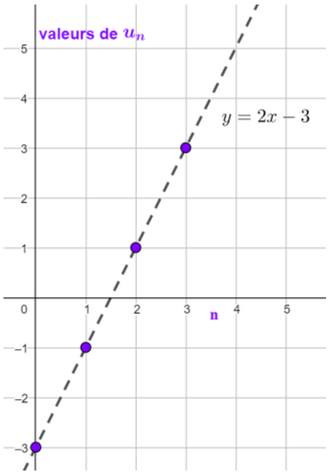
2) Exemples

Exemple 1 : Soit la suite (u_n), définie pour tout n ≥ 0 par $u_n = 2n - 3$

Représentons cette suite graphiquement :

$u_0 = 2 \times 0 - 3 = -3$ $\quad u_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$ $\quad u_2 = 2 \times 2 - 3 = 1$ $\quad u_3 = 2 \times 3 - 3 = 3$

La représentation graphique est l'ensemble des points A_n de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$
La représentation graphique de cette suite est donc le nuage de points de coordonnées
$(0\ ;\ -3)\ ;\ (1\ ;\ -1)\ ;\ (2\ ;\ -2)$ et $(3\ ;\ 3)$



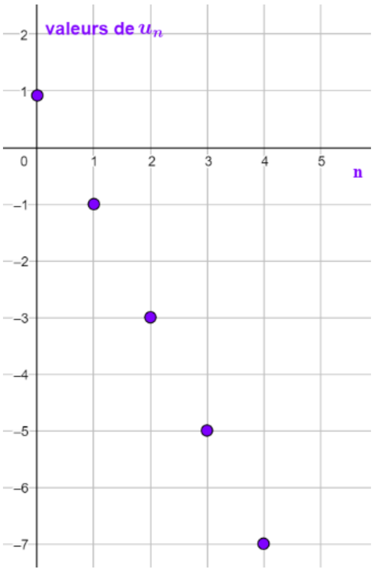
Les points sont alignés sur la droite d'équation $y = 2x - 3$

Exemple 2 : Soit la suite (u_n), définie pour tout n ≥ 1 par $u_{n+1} = u_n - 2$ avec $u_0 = 1$

Représentons cette suite graphiquement :

$u_1 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$ $\quad u_2 = u_1 - 2 = -1 - 2 = -3$

$u_3 = u_2 - 2 = -3 - 2 = -5$ $\quad u_4 = u_3 - 2 = -5 - 2 = -7$

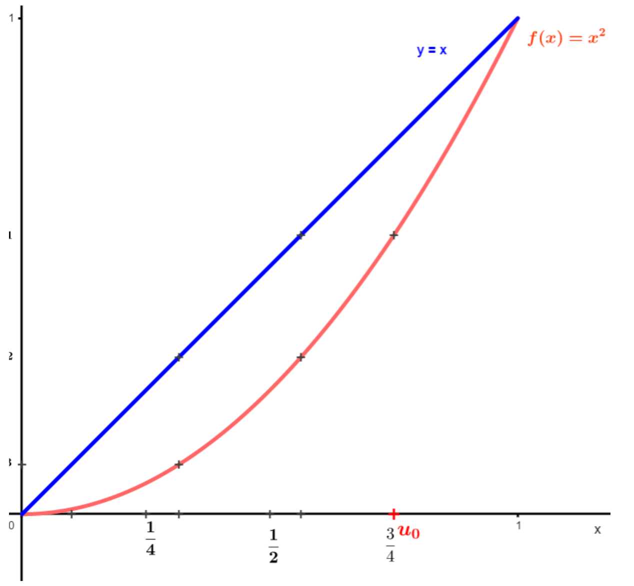


La représentation graphique de cette suite est donc le nuage de points de coordonnées
$(0\ ;\ 1)\ ;\ (1\ ;\ -1)\ ;\ (2\ ;\ -3)\ ;\ (3\ ;\ -5)\ ;\ (4\ ;\ -7)$ …

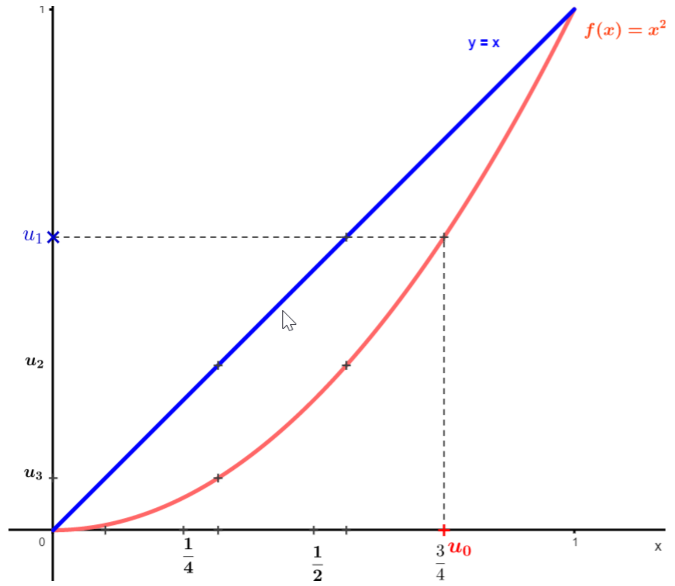
Exemple 3 : Représentation graphique des fonctions définies par récurrence

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_{n+1} = u_n{}^2$ et $u_0 = 0{,}75$

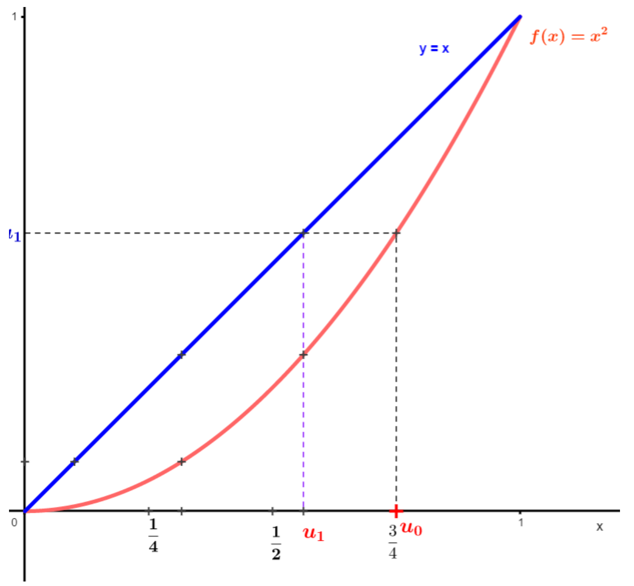
Soit f la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. A partir de la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle]0 ; 1[, nous allons construire les points A0 $(u_0 \ ; f(u_0))$; A1 $(u_1 \ ; f(u_1))$; A2 $(u_2 \ ; f(u_2))$; A3 $(u_3 \ ; f(u_3))$;



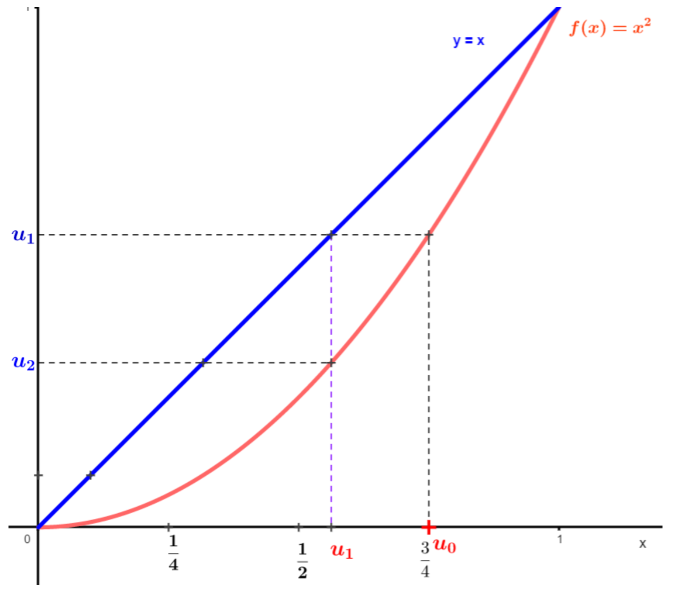
Nous traçons d'abord la droite $y = x$ et plaçons u_0 sur l'axe des abscisses.



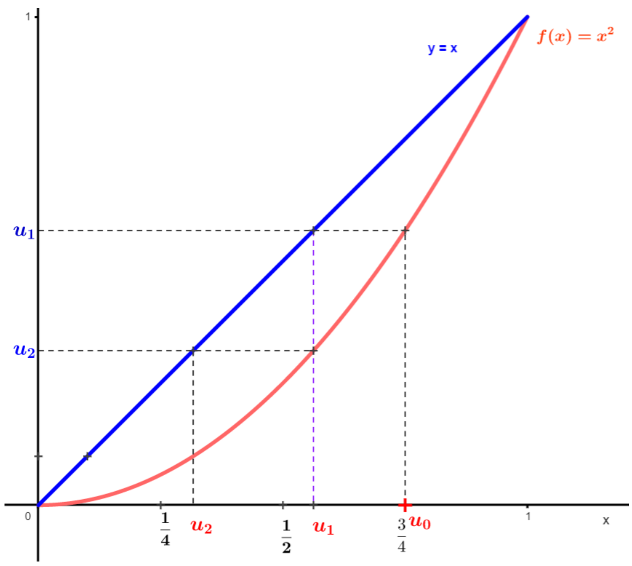
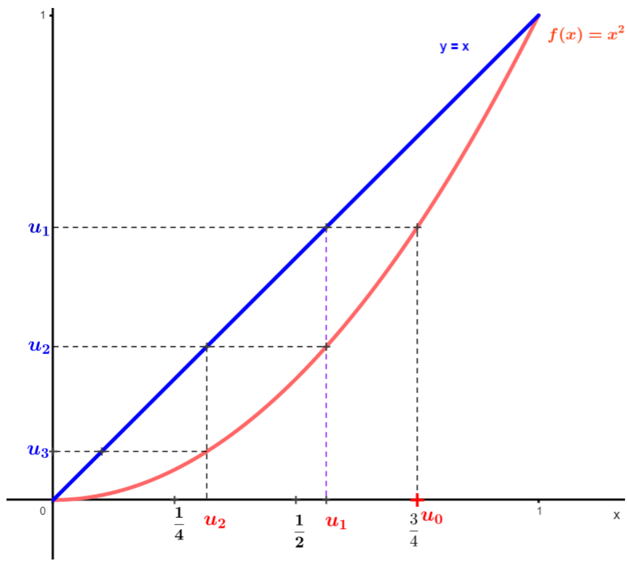
On place ensuite u_1 l'image de u_0 par la fonction f.



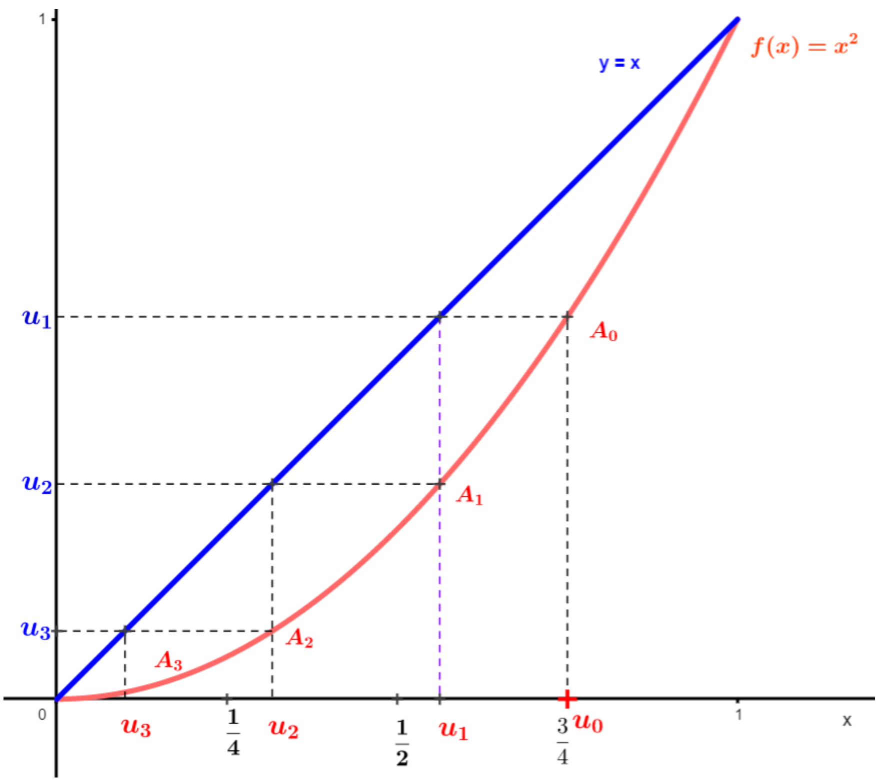
Comme u_2 est l'image de u_1 , nous devons reporter la valeur u_1 sur l'axe des abscisses, on utilise la droite $y = x$



On place ensuite u_2 l'image de u_1 par la fonction f.

	
Comme u_3 est l'image de u_2 , nous devons reporter la valeur u_2 sur l'axe des abscisses, on utilise la droite $y = x$	On place ensuite u_3 l'image de u_2 par la fonction f.

Nous obtenons ainsi :



IV) Sens de variation d'une suite numérique.

1) Définitions :

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, une suite numérique. On dit que cette suite est :

- **croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$**
- **décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$**
- **constante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$**

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, est monotone si elle est croissante ou décroissante

Remarque : pour connaître le sens de variation d'une suite, on compare donc deux termes consécutifs de la suite. On doit faire cela pour tous les termes de la suite.

2) Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

Selon l'expression de la suite (u_n) :

• Méthode 1 : On calculera l'expression $u_{n+1} - u_n$ et on étudiera son signe :

Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite u est croissante

Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite u est décroissante

En Effet $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

• Méthode 2 : On peut aussi, sous certaines conditions, calculer l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on compare cette expression à 1 :

Tout d'abord, il faut prouver que tous les termes de la suite u sont positifs puis, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

• Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite u est croissante.

• Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite u est décroissante.

En Effet, Si tous les termes de la suite u sont positifs, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

• **Méthode 3 : Dans le cas où $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonctions f sur [0 ; +∞ [**

Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur [0 ; + ∞ [:

Si la fonction f est croissante sur [0 ; + ∞ [alors la suite u est croissante aussi

Si la fonction f est décroissante sur [0 ; + ∞ [alors la suite u est décroissante aussi

En effet, pour tout entier naturel n, $n < n + 1$, si f est croissante alors $f(n) < f(n+1)$

si f est décroissante alors $f(n) > f(n+1)$

3) Exemples

Exemple 1: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = 3n+1$ on a donc :

$u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n+3+1 = 3n+4$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3n+4-(3n+1) = 3n+4-3n-1 = 3$. 3 est positif donc

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 2: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_{n+1} = 4 \times u_n$ et $u_0 = 2$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times u_n}{u_n} = 4$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1}$,

Comme tous les u_n sont positifs car $u_0 = 2$ et on multiplie par 2 chaque terme pour avoir le suivant

on a : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est donc croissante.

Exemple 3: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ par : $u_n = \frac{1}{n}$

$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

Donc Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n < 0$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} < u_n$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Exemple 4 : On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}}$ par : $u_n = n^2 - 3n + 1$

Considérons $f(x) = x^2 - 3x + 1$, avec $u_n = f(n)$.

Cette fonction est une fonction du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = 1{,}5$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,; 1{,}5]$ et croissante sur [1,5 ; +∞[.

Dès que $n \neq 0$ ou $n \neq 1$, c'est-à-dire pour tout $n \geq 2$ $(\boldsymbol{u_n})_{n\geq 2}$ **est strictement croissante.**

V) Etude du comportement des suites à l'infini

Exemple 1 : On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = 2n + 1$

Etudions le comportement de cette suite lorsque n prends des valeurs de plus en plus grandes.

$\boldsymbol{n}$	5	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$\boldsymbol{u_n}$	11	21	201	2 001	20 001	200 001	2 000 001

$u_n > 10$ pour n > 5

$u_n > 200$ pour n > 100

$u_n > 200\,000$ pour n > 100 000

Plus n est grand et plus les valeurs de u_n le sont aussi.

Pour traduire cette notion on dit que la suite u a pour limite +∞ et se note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Exemple 2 : On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $v_n = 2 + \frac{1}{n}$

Etudions le comportement de cette suite lorsque n prends des valeurs de plus en plus grandes.

$\boldsymbol{n}$	5	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$\boldsymbol{v_n}$	2,2	2,1	2,01	2, 001	2,0001	2,00001	2,000 001

$1{,}7 < v_n < 2{,}3$ pour n > 5

$1{,}9999 < v_n < 2{,}0001$ pour n > 1 000

$1{,}999\,999 < v_n < 2{,}000\,001$ pour n > 1 000 000

On remarque que plus n est grand plus v se rapproche de 2

Plus n est grand et plus les valeurs de u_n se rapprochent de 2 :

Pour traduire cette notion on dit que la suite v a pour limite 2 et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$$

Exemple 3 : On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $w_n = (-1)^n$

Etudions le comportement de cette suite lorsque n prends des valeurs de plus en plus grandes.

n	5	10	101	1 000	10 003	100 000	1 000 001	100 000 000
w_n	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

Cette suite ne peut pas avoir de limite ni finie ni infinie, les valeurs de u oscillent entre 1 et -1.

Pour déterminer le comportement d'une suite à l'infinie, on utilise la calculatrice, ou on programme en Python des valeurs de la suite pour n suffisamment grand dont voici un exemple de programme :

2) Calcul d'un rang à partir de laquelle notre suite est plus grande qu'un nombre donné

Soit une suite telle que $u_0 = 15$ et pour tout entier naturel n par la relation $u_{n+1} = 5u_n + 2$
Nous allons faire un programme pour déterminer le plus petit entier naturel p tel que $U_p > 10\ 000$

```
def min():
    A=15
    N=0
    while A<=10000:
        N=N+1
        A=5*A+2
    return(N)
```

Le plus petit entier p est 5