Dérivées des fonctions usuelles. Opérations

I) Définition

Une fonction f est dérivable sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) D si, et seulement si elle est dérivable pour tout réel $a \in$ D

Si f est dérivable sur D, on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction notée f' définie sur D par : $a \to f'(a)$

II) Dérivées des fonctions usuelles

1) Fonction constante $f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$

La fonction constante $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 0$

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a (réel quelconque).

On a pour tout réel $h \neq 0$ $\quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$

Donc pour tout réel a et pour tout réel $h \neq 0$ on a $f'(a) = 0$
d'où le résultat $f'(x) = 0$ pour tout x réel

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3{,}5$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x) = 0$

2) Fonction $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$

a) Fonction $f(x) = x$

La fonction $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 1$

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a (réel quelconque).

On a pour tout réel $h \neq 0$ $\quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{a+h-a}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$ puisque $h \neq 0$

Donc pour tout réel a on a $f'(a) = 1$ d'où le résultat $f'(x) = 1$ pour tout x réel

b) Fonction $f(x) = x^2$

La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 2x$

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a (réel quelconque).

On a pour tout réel $h \neq 0$ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = \dfrac{h(2a+h)}{h}$

Donc pour tout réel $h \neq 0$ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a + h$

Pour tout réel a lorsque h tend vers 0, ce taux de variation tend vers $2a$

Donc on a $f'(a) = 2a$ d'où le résultat $f'(x) = 2x$ pour tout x réel

c) Cas général : Fonction $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

La fonction $f(x) = x^n$ ($n \in N$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = nx^{n-1}$

Résultat admis en première

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^7$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x) = 7x^6$

3) fonction affine

m, p étant deux nombres réels, la fonction affine $f(x) = mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = m$

Démonstration : Calculons le taux de variation de la fonction $f(x) = mx + p$

On a pour tout réel $h \neq 0$ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \dfrac{ma+mh+p-ma-p}{h} = \dfrac{mh}{h} = m$

Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = m$ et lorsque h tend vers 0, ce taux de variation tend vers m

Donc on a $f'(a) = m$ d'où le résultat $f'(x) = m$ pour tout x réel (La dérivée est une fonction constante)

4) Fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur les intervalles] - ∞ ; 0 [et] 0 ; + ∞ [et sa fonction dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Démonstration : Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a ($a \neq 0$).

On a pour tout réel $h \neq 0$ tel que a et $a + h$ soient de même signe :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{ah(a+h)}$$

Donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$ puisque $h \neq 0$

Pour tout réel $a \neq 0$ lorsque h tend vers 0, ce taux de variation tend vers $\frac{-1}{a^2}$

Donc on a $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ d'où le résultat $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ pour tout x réel non nul.

5) Fonction $f(x) = \sqrt{x}$

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [et sa fonction dérivée est $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a ($a \neq 0$).

On a pour tout réel $h > 0$ tel que **a et $a + h$ soient strictement positifs**

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} =$$

$$= \frac{(a+h)-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

Donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ puisque $h \neq 0$

Pour tout réel $a \neq 0$ lorsque h tend vers 0, ce taux de variation tend vers $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}$

Donc on a $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ d'où le résultat $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$.

Remarques :

• **La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable pour $a = 0$ (voir fiche Nombre dérivé et tangente)**

• **La fonction $f(x) = |x|$ est dérivable sur les intervalles] - ∞ ; 0 [et] 0 ; + ∞ [**

Démonstration :

1°) Lorsque $x \in]\,0\,;+\infty\,[$ $f(x) = x$ donc f est dérivable (voir plus haut) et $f'(x) = 1$

2°) Lorsque $x \in]-\infty\,;0\,[$ $f(x) = -x$

Calculons le taux de variation de la fonction f en un point a (a < 0).

On a pour tout réel $h \neq 0$ tel que $a + h$ soit négatif

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-(a+h)-(-a)}{h} = \frac{-h}{h}$ = – 1 puisque $h \neq 0$

Donc pour $a < 0$ $f'(a) = -1$ et $f'(x) = -1$ sur] - ∞ ; 0 [

<u>Remarque</u> : le taux de variation prenant deux valeurs différentes sur] 0 ; + ∞[et sur] - ∞ ; 0 [la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en zéro.

6) Fonction $f(x) = \frac{1}{x^n}$

La fonction $f(x) = \frac{1}{x^n}$ est dérivable sur les intervalles] - ∞ ; 0 [et]0 ; + ∞ [
et sa fonction dérivée est $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Résultat admis en première

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^7}$.

f est dérivable sur] - ∞ ; 0 [∪] 0 ; + ∞ [et sa fonction dérivée est : $f'(x) = \frac{-7}{x^8}$

III)Tableau récapitulatif

Fonction f :	***Dérivable sur*** :	***Fonction dérivée f'*** :
$f(x) = k\ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^n (n \in N^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}\ \ (n \in N)$	$]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0\ ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

IV) Dérivées et opérations

Dans toute la suite u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel.

1) Somme de deux fonctions

La fonction $u + v$ définie par $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x + x^4$ sur $\mathbb{R}$

La dérivée de x est 1

La dérivée de x^4 est $4x^3$

On obtient $f'(x) = \mathbf{1 + 4x^3}$

2°) $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 - 3$ pour x réel, $x \neq 0$

La dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$,

La dérivé de $-x^2$ est $-2x$ et

La dérivée de – 3 est 0

On obtient $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2x$

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction $u + v$ pour $a \in$ D
Pour tout $h \neq 0$ tel que $a+h \in$ D

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Les fonctions u et v étant dérivables en a, lorsque h tend vers 0 le premier quotient tend vers $u'(a)$ et le deuxième quotient vers $v'(a)$

Le taux de variation de la fonction $u + v$ tend vers $u'(a) + v'(a)$
Pour tout $a \in$ D la fonction dérivée de la fonction $u + v$ est bien $u' + v'$

2) Produit d'une fonction par un réel

La fonction λu définie par $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$ est dérivable sur D et

sa dérivée est définie par $(\lambda u)'(x) = \lambda u'(x)$.

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = 7x^3$ sur $\mathbb{R}$
La dérivée de x^3 est $3x^2$
On obtient $\boldsymbol{f'(x) = 7 \times 3x^2 = 21x^2}$

2°) $f(x) = \frac{4}{x}$ pour x réel, $x \neq 0$
La dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$
On obtient $\boldsymbol{f'(x) = -\frac{4}{x^2}}$

3°) $f(x) = 5x^2 - 3\sqrt{x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

La dérivée de x^2 est $2x$

La dérivée de $\sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

On obtient $f'(x) = 5 \times 2x - 3\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\boldsymbol{f'(x) = 10x - \frac{3}{2\sqrt{x}}}$

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction λu pour $a \in$ D
Pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h \in$ D

$\frac{(\lambda u)(a+h)-(\lambda u)(a)}{h} = \frac{\lambda u(a+h)-\lambda u(a)}{h} = \lambda \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$

Or la fonction u étant dérivable en a, lorsque h tend vers 0 le quotient tend vers $u'(a)$.

Le taux de variation de la fonction λu tend vers $\lambda u'(a)$
Pour tout $a \in$ D la fonction dérivée de la fonction λu est bien $\lambda u'$.

3) Fonction polynôme

a) Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme si $f(x)$ peut s'écrire comme une somme de termes de la forme kx^n avec $k \in \mathbb{R}$ et $n \in N$.

b) Dérivée

Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

Ceci est une conséquence des résultats du I) et du II)

Exemples :

Calculer les dérivées des fonctions polynômes suivantes sur $\mathbb{R}$:

1°) $f(x) = x^2 + 3x - 5$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = 2x + 3}$

2°) $f(x) = \frac{3}{2} x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2} x - 5$

On obtient $\boldsymbol{f'(x) = \frac{9}{2} x^2 - 10x + \frac{1}{2}}$

4) Produit de deux fonctions

La fonction uv définie par $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable sur D et sa dérivée est définie par $(u\,v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)\,v'(x)$

Exemples : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x^2 \sqrt{x}$ sur] 0 ; $+\infty$ [
En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$ on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ On obtient
$f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{2\times 2\times x\times\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

2°) $f(x) = (x^3 + 3x + 1)(2x^2 + 5x - 1)$ sur $\mathbb{R}$

En posant $u(x) = x^3 + 3x + 1$ et $v(x) = 2x^2 + 5x - 1$ on a

$u'(x) = 3x^2 + 3$ et $v'(x) = 4x + 5$

On obtient $f'(x) = (3x^2 + 3)(2x^2 + 5x - 1) + (x^3 + 3x + 1)(4x + 5)$

$f'(x) = 6x^4 + 15x^3 - 3x^2 + 6x^2 + 15x - 3 + 4x^4 + 12x^2 + 4x + 5x^3 + 15x + 5$

$f'(x) = 10x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 34x + 2$

La fonction dérivée peut-être écrite sous sa forme développée ou factorisée selon le contexte.

Démonstration :

Calculons le taux de variation de la fonction uv pour $a \in$ D
Pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h \in$ D

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$

En soustrayant et ajoutant $u(a)v(a+h)$ au numérateur ce taux de variation s'écrit :

$$\frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$$

Ou encore :

$$\frac{v(a+h)(u(a+h)-u(a))}{h} + \frac{u(a)(v(a+h)-v(a))}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h}\, v(a+h) + u(a)\,\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Les fonctions u et v étant dérivables en a, lorsque h tend vers 0,

$\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tend vers $u'(a)$ et $\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ vers $v'(a)$

En admettant que lorsque h tend vers 0, $v(a+h)$ tend vers $v(a)$

$\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\, v(a+h) + u(a)\,\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ tend vers $u'(a)\,v(a) + u(a)\,v'(a)$

Donc le taux de variation de la fonction $u\,v$ tend vers $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

Pour tout $a \in$ D la fonction dérivée de la fonction uv est bien $u'v + uv'$

5) Inverse d'une fonction

La fonction $\frac{1}{v}$ définie par $(\frac{1}{v})(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur l'ensemble D privé des réels où $v(x) = 0$ (D $\cap$ { x I $v(x) \neq 0$ }) et sa dérivée est définie par:
$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = \frac{1}{x^2+7}$ sur $\mathbb{R}$

En posant $u(x) = x^2 + 7$ on a $u'(x) = 2x$

On obtient $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+7)^2}$

2°) $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{x}}$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

En posant $u(x) = \sqrt{x}$ on a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

On obtient $f'(x) = -4 \times \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{4}{2}}{(\sqrt{x})^2\sqrt{x}} = \frac{2}{x\sqrt{x}}$

6) Quotient de deux fonctions

La fonction $\frac{u}{v}$ définie par $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur l'ensemble D privé des réels où $v(x) = 0$ (D $\cap$ { x / $v(x) \neq 0$}) et sa dérivée est définie par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Exemples

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = \frac{3x+1}{5x-3}$ sur $]\,-\infty\,;\,\frac{3}{5}\,[\,\cup\,]\,\frac{3}{5}\,;\,+\infty\,[$

En posant $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = 5x - 3$ on a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 5$

$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$

On obtient $f'(x) = \frac{3(5x-3) - 5(3x+1)}{(5x-3)^2} = \frac{\mathbf{-14}}{\mathbf{(5x-3)^2}}$

2°) $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{3x+1}$ sur $]\,-\infty\,;\,-\frac{1}{3}\,[\,\cup\,]\,-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\,[$

En posant $u(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $v(x) = 3x + 1$ on a $u'(x) = 4x - 3$ et $v'(x) = 3$

$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v^2(x)}$

On obtient $f'(x) = \frac{(4x-3)(3x+1) - 3(2x^2-3x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{12x^2+4x-9x-3-6x^2+9x-3}{(3x+1)^2}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{6x^2+4x-6}{(3x+1)^2}}$$

Démonstration :

Le résultat s'obtient à l'aide des résultats du 5) et 6) en écrivant : $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$

En effet avec cette écriture :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times (-\frac{v'}{v^2}) = u' \times \frac{v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

D'où le résultat annoncé.

7) Composition de fonctions et dérivation

a) composition de fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout réel x de I, $g(x)$ appartient à J.

La fonction composée de g suivie de f est la fonction h définie sur I par $h(x) = f(g(x))$

$$x \overset{g}{\longmapsto} g(x) = X \overset{f}{\longmapsto} f(X)$$
$$x \longmapsto f(g(x))$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur J = [0 ;+∞[par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction définie sur J=[−2 ;+∞[par $g(x) = 3x + 6$

• La fonction h composée de f suivie de g est la fonction $h(x) = f(g(x)) = f(3x + 6) = \sqrt{3x + 6}$
La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur [0 ; +∞[et par conséquent $x \longmapsto \sqrt{3x + 6}$ est définie lorsque $3x + 6 \geq 0$ c'est-à-dire sur [−2 ;+∞[

• La fonction i composée de g suivie de f est la fonction $i(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 6$
La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur [0 ; +∞[et par conséquent $x \longmapsto 3\sqrt{x} + 6$ est définie sur [0 ; +∞[

b. Dérivée de la composée avec une fonction affine

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et g une fonction affine définie sur un intervalle I par $g(x) = ax + b$ avec a, b deux réels tel que J est l'intervalle formé par les valeurs prises de $ax + b$ lorsque x décrit l'intervalle I.

Alors la fonction h composée de g suivie de f est dérivable sur I, alors la fonction f définie sur I par

$h : x \longmapsto f(ax + b)$ est dérivable sur I et on a pour tout réel x de I on a :

$h'(x) = af'(ax + b)$

Exemple : Reprenons l'exemple précédent :

Soit f la fonction définie sur J = [0 ; +∞[par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction définie sur J=[−2 ;+∞[par $g(x) = 3x + 6$. La fonction h composée de f suivie de g est la fonction $h(x) = (f(g(x)) = f(3x + 6) = \sqrt{3x + 6}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur]0 ; +∞[,par conséquent $3x + 6 > 0$ pour $x > -2$, h est donc dérivable sur]−2 ;+∞[et sa dérivée est :

$$h'(x) = 3f'(3x + 6) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 6}}$$

8) Tableau récapitulatif

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel on a :

Fonction	Dérivable sur	Dérivée
$u + v$	D	$u' + v'$
λu	D	$\lambda u'$
$(ax + b)^n$	D	$na(ax + b)^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$\{x \ / \ u(x) \neq 0\}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{(ax + b)^n}$	$\{x \ / \ u(x) \neq 0\}$	$-\frac{na}{(ax + b)^{n+1}}$
uv	D	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\{x \ / \ v(x) \neq 0\}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{ax + b}$	$\{x \ / \ ax + b > 0\}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$

V) Sens de variation d'une fonction et extremum local

1) Signe de f' et variation de f

- **f est croissante sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$**
- **f est décroissante sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$**
- **f est constante sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$**

2) Extremum locaux

Si le fonction dérivée f' s'annule en a en changeant de signe de part et d'autre de a , alors f admet un extremum local en a :

x		a	
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variation de f	↗	$f(a)$	↘

$f(a)$ est un maximum local

x		a	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variation de f	↘	$f(a)$	↗

$f(a)$ est un minimum local

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$

Sa dérivée est $f(x) = 2x$ et $f'(x) = 0$ si et seulement si $2x = 0$ si et seulement si $x = 0$

De plus $2x \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$ et $2x \leq 0$ si et seulement si $x \leq 0$

En résumé $f'(0) = 0$ et si $x \geq 0$ $f'(x) \geq 0$ et si $x \leq 0$ $f'(x) \leq 0$ et $f(0) = 0^2 - 4 = -4$

-4 est bien un extremum local, c'est un minimum

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

Autre exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 1$

$f'(x) = 3x^2$ $f'(x) = 0$ si et seulement si $3x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$ mais $f'(x)$ ne change pas de signe (un carré étant toujours positif donc sans ce cas $f(0)$ n'est pas un extremum.

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1	↗

3) Etude de variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction :

1. Calcul de la fonction dérivée f' de f

2. Etude du signe de la dérivée f' sur I

3. Construction du tableau de variations

x	**Intervalle de définition de f : I**
Signe de $f'(x)$	**Signes**
Variations de f	**Variations et extremum locaux**

Exemple : Etudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+5}{x^2+11}$

1. Calcul de la fonction dérivée de f :

$u(x) = x + 5$ $\quad$ $u'(x) = 1$

$v(x) = x^2 + 11$ $\quad$ $v'(x) = 2x$ $\quad$ $f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$

On obtient $f'(x) = \dfrac{1(x^2+11) - 2x(x+5)}{(x^2+11)^2} = \dfrac{x^2+11-2x^2-10x}{(x^2+11)^2}$ $\quad$ $f'(x) = \dfrac{-x^2-10x+11}{(x^2+11)^2}$

2. Etude du signe de $f'(x)$ .Le dénominateur est toujours positif, le signe de f' dépend de celui de $-x^2 - 10x + 11$. $\quad$ $\Delta = (-10)^2 - 4 \times (-1) \times 11 = 144 > 0$

$-x^2 - 10x + 11$ a deux racines : $x_1 = \frac{10-\sqrt{144}}{-2}$ et $x_2 = \frac{10+\sqrt{144}}{-2}$

$x_1 = \frac{10-12}{-2}$ et $x_2 = \frac{10+12}{-2}$

$x_1 = 1$ et $x_2 = -11$

On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		-11		1		$+\infty$
$-x^2 - 10x + 11$		-	0	+	0	-	
$x^2 + 11$		+		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

3. On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		-11		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{22}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

$f(-11) = \frac{-11+5}{(-11)^2+11} = \frac{-11+5}{(-11)^2+11} = \frac{-6}{132} = \frac{-1}{22}$

$f(1) = \frac{1+5}{1^2+11} = \frac{1+5}{1^2+11} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$\frac{-1}{22}$ est un minimum local de f et

$\frac{1}{2}$ est un maximum local de f