Fonction exponentielle

I) Définition de la fonction exponentielle

1) Théorème 1:

• Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
Pour tout nombre x, $f'(x) = f(x)$, et $f(0) = 1$

• Cette fonction est appelée fonction exponentielle.

On la note exp. $f(x) = exp(x)$

2) Conséquences immédiates

• La fonction exponentielle $exp : x \mapsto \exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(exp)' = exp$ et $exp(0) = 1$

• Pour tout nombre x, $exp(x) \neq 0$ et $exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}$

Démonstration facultative de $exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}$:

On sait que : $exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $(exp)' = exp$ et $exp(0) = 1$ par définition.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = exp(x) \times exp(-x)$

$f'(x) = (exp(x) \times exp(-x))' = exp(x) \times exp(-x) - exp(x) \times exp(-x) = 0$

Donc f est une fonction constante

Or $f(0) = exp(0) \times exp(0) = 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $exp(x) \times exp(-x) = 1$

Comme $exp(x) \neq 0$ (nous l'avons démontré précédemment)

alors en divisant par $exp(x)$ on obtient :

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}$

II) Propriétés de la fonction exponentielle

Théorèmes :

Pour tous nombres réels a et b et pour tout entier relatif n :

- $exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$
- $exp(a-b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}$
- $exp(na) = (exp(a))^n$

Pour tout nombre x :

- $exp(x) > 0$

Démonstrations facultatives :

• ***Démontrons que*** $exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$ ***:***

Soit a un nombre réel et $h(x) = \dfrac{exp(a+x)}{exp(a)}$

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = \dfrac{exp'(a+x)}{exp(a)} = \dfrac{exp(a+x)}{exp(a)} = h(x)$

De plus $h(0) = \dfrac{exp(a+0)}{exp(a)} = \dfrac{exp(a)}{exp(a)} = 1$

On a donc : $h' = h$ et $h(0) = 1$. Or d'après le théorème 1 il existe une unique fonction telle que $h' = h$ et $h(0) = 1$ qui est : $h(x) = exp(x)$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$: $\dfrac{exp(a+x)}{exp(a)} = exp(x)$

On obtient donc : $exp(a+x) = exp(a) \times exp(x)$

En particulier pour $x = b$: $exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$

• ***Démontrons que*** $exp(a-b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}$ **:**

Pour tous nombres a et b réels,

$exp(a) = exp(a-b+b)$ et $exp(a-b+b) = exp(a-b) \times exp(b)$ en utilisant la propriété précédente.

On a donc : $exp(a-b) \times exp(b) = exp(a)$

Comme $exp(b) \neq 0$ alors on peut diviser par $exp(b)$

$exp(a-b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}$

• ***Démontrons que*** $exp(x) > 0$:

Pour tout nombre réel x, $\exp(x) = \exp\left(2 \times \dfrac{x}{2}\right) = \exp\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$, comme $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 > 0$ $\exp(x) > 0$

III) Nouvelle notation de la fonction exponentielle

On pose e = $exp\ (1)$
Une calculatrice indique e $\approx$ 2,718281828

Conséquences :

Or nous avons vu précédemment que pour tout entier relatif n, $exp(n) = ((exp(1))^n$

On étend cette égalité à l'ensemble des nombres réels

On a donc :

Pour tout nombre réel x, $exp(x) = e^x$
On le lit : « exponentielle de x » ou « e exposant x »

D'où les notations simplifiées :

- $e^0 = 1$ **et** $e^1 = e$

Pour tous nombres réels a et b:

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif n,

- $(e^x)^n = e^{nx}$

IV fonction exponentielle

1) Variation de la fonction exponentielle

Théorème 5:

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$

Démonstration :

Pour tout nombre réel x, $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$

Donc $e^x \geq 0$. Comme $e^x \neq 0$ alors pour tout réel x, $e^x > 0$

Théorème :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration:

Pour tout nombre réel x, $(e^x)' = e^x$

Or pour tout réel x, $e^x > 0$

Ainsi, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

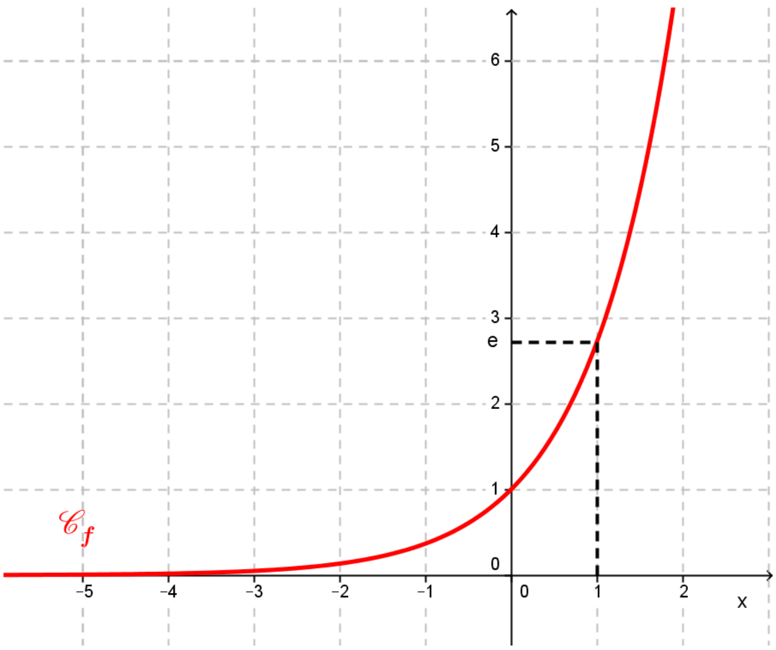
2) Tableau de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle

a) Tableau de variation :

Les résultats précédents nous permettent d'écrire :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		
$f(x)$	0	1	e	↗

b) Courbe représentative de la fonction exponentielle



Conséquences importantes :

Pour tous nombres réels a et b :

• $a < b$ si et seulement si : $e^a < e^b$

• $a = b$ si et seulement si : $e^a = e^b$

Ces deux équivalences résultent de la stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Elles sont surtout utilisées lors de la résolution d'équations et d'inéquations comme dans les exemples ci-dessous :

Exemple 1 : Résolvez l'équation suivante : $e^{3-x} = 1$

$e^{3-x} = 1$ si et seulement si: $e^{3-x} = e^0$ si et seulement si: : $3 - x = 0$

Donc $x = 3$

Cette équation a pour solution 3.

Exemple 2 : Résolvez l'inéquation suivante : $e^{2x} < e^x$

$e^{2x} < e^x$ si et seulement si : $2x < x$ si et seulement si : $x < 0$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :]$-\infty$; 0]

Exemple 3: Résolvez l'équation suivante : $e^{2x} - 2e^x = -1$

$e^{2x} - 2e^x = -1$ si et seulement si : $(e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$

Posons $\boldsymbol{X = e^x}$ on obtient l'équation :

$X^2 - 2X + 1 = 0$

$(X - 1)^2 = 0$

Donc :

$X = 1$ On obtient donc :

$e^x = 1$ c'est-à-dire $e^x = e^0$

qui a pour solution : $\boldsymbol{x = 0}$

Cette équation a pour solution 0

IV fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

1) Dérivées des fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

Toute fonction de la forme $t \mapsto e^{kt}$, $k \in \mathbb{R}/\{0\}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction dérivée est : $t \mapsto ke^{kt}$

Démonstration : En appliquant la formule des dérivées : la dérivée de $g(at + b)$ est $ag'(ax + b)$ avec $g(x) = e^x$ $g'(x) = e^x$

Exemples :

• Soit la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{3t}$ **.** La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction : $t \mapsto 3e^{3t}$

• Soit la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{-5t}$. La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction : $t \mapsto -5e^{e^{-5t}}$

2) Variations des fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

Si $k > 0$, toute fonction de la forme $t \mapsto e^{kt}$ est strictement croissante

Si $k < 0$, toute fonction de la forme $t \mapsto e^{kt}$ est strictement décroissante

Démonstration : La fonction dérivée de la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est $t \mapsto ke^{kt}$

$e^{kt} > 0$ si $k > 0$ alors $ke^{kt} > 0$ dans ce cas la fonction est strictement croissante

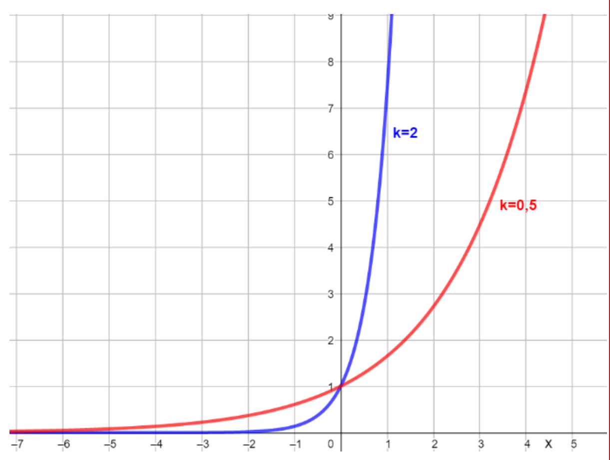
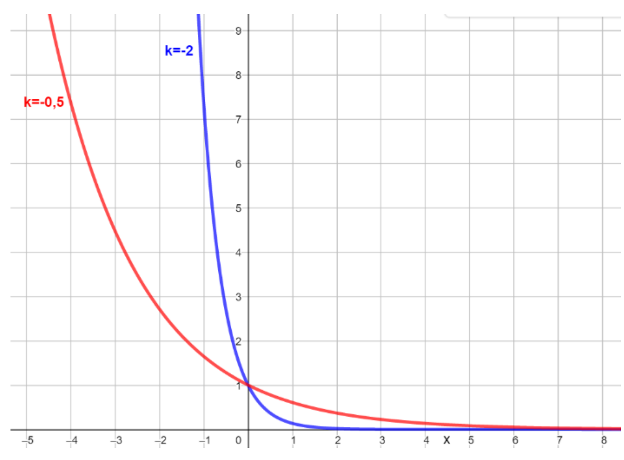
et si $k < 0$ alors $ke^{kt} < 0$ dans ce cas la fonction est strictement décroissante

Exemples :

• Nous avons vu, que la dérivée de la fonction $t \mapsto e^{3t}$ est la fonction : $t \mapsto 3e^{3t}$. Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Nous avons vu, que la dérivée de la fonction $t \mapsto e^{-5t}$ est la fonction : $t \mapsto -5e^{e^{-5t}}$. Cette fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) Représentation graphique des fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

$k > 0$	$k > 0$
	

V) Fonctions exponentielles et suites

Propriété :

La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a

Nous avons vu dans les propriétés du III) que $e^{nx} = (e^x)^n$ donc $e^{na} = (e^a)^n$

Rappel : Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 a pour terme général : $u_n = u_0\, q^n$. Donc la suite est $u_n = (e^a)^n$ avec $u_0 = e^0=1$

Exemples :

Exemple 1 : Déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est $u_n = e^{2n-1}$.

$u_n = e^{2n-1} = e^{2n}e^{-1} = e^{-1}(e^2)^n = \frac{1}{e}\,(e^2)^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison e^2 et de premier terme $\frac{1}{e}$.

Exemple 2 : Déterminer le terme général d'une suite géométrique de raison e^4 et de premier terme **2**.

$u_n = 2\,(e^4\,)^n$

$\boldsymbol{u_n = 2\,e^{4n}}$

VI) Problèmes

Problème 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^x$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c. Déterminer une équation de la tangente de la courbe au point d'abscisse 0.

d. Tracer, en vous aidant de la calculatrice, la courbe représentative de la fonction f.

Correction :

a. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 2x+1$ $\quad v(x) = e^x$.

$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x)v'(x)$ $\quad u'(x) = 2$ $\quad v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = e^x(2x+3)$

$\boldsymbol{f'(x) = (2x+3)e^x}$

b. $f'(x) = (2x+3)e^x$

Or, e^x >0 donc $f'(x) = 0$ si et seulement si : $2x+3 = 0$ si et seulement si : $x = -\frac{3}{2}$ $\quad x = -1,5$

$2x+3 > 0$ si et seulement si : $x > -\frac{3}{2}$

On obtient le tableau de variation :

x	-∞		-1,5		+∞
e^x		+		+	
$2x+3$		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	$-2e^{-1,5}$	↗	

c. L'équation de la tangente en $x = 0$ est : $y = f(0) + xf'(0)$

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = (2 \times 0 + 3)e^0 = 3$

L'équation de la tangente en $x = 0$ est : $\boldsymbol{y = 3x + 1}$

d.

Problème 2 : sujet prévu à l'épreuve commune première 2020-2021

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3xe^{-0,4x}$.

La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.

1. Démontrer que la fonction f' a pour expression $f'(x) = (-1,2x + 3)e^{-0,4x}$

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

4. Un sportif a pris un produit dopant. La fonction f modélise la quantité, en mg/L, de ce produit dopant présent dans le sang du sportif x heures après la prise.

a. Pourquoi peut-on affirmer que ce produit dopant n'est pas naturellement présent dans l'organisme du sportif ?

b. Combien de temps après son absorption, ce produit dopant sera-t-il présent en quantité maximale dans le sang du sportif ?

c. Le sportif absorbe ce produit dopant au début d'une séance d'entraînement.

Le même jour, 6 heures après le début de cette séance d'entraînement, il est soumis à un contrôle anti-dopage. Celui-ci se révèlera positif si la quantité de produit dopant présent dans l'organisme de ce sportif dépasse 1,4 mg/L.

Ce contrôle anti-dopage sera-t-il positif ? Justifier.

Correction :

1. $f(x) = 3x\mathbf{e}^{-0,4x}$.
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(x) = u(x) \times v(x)$ *avec* $u(x) = 3x$ $v(x) = e^{-0,4x}$.

$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x)v'(x)$ $u'(x) = 3$ $v'(x) = -0,4e^{-0,4x}$

$f'(x) = 3e^{-0,4x} - 3x \times 0,4e^{-0,4x} = e^{-0,4x}(3 - 1,2x) = (-1,2x + 3)\ e^{-0,4x}$
$\boldsymbol{f'(x) = (-1,2x + 3)\ e^{-0,4x}}$

2. $f'(x)$ = $(-1{,}2x + 3)\ e^{-0{,}4x}$

$-1{,}2x\ +\ 3 = 0$ si et seulement si : $x = \frac{3}{1{,}2}$ = 2,5

$-1{,}2x\ +\ 3 \geq 0$ si et seulement si : x ≤2,5

De plus $\mathrm{e}^{-0{,}4\mathrm{x}} > 0$ sur $\mathbb{R}$, à fortiori sur $[0\ ;+\infty[$

Signe de $f'(x)$:

x	0	2,5	+∞
$e^{-0{,}4x}$	+		+
$-1{,}2x + 3$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

$\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$ **sur [2,5 ; +∞[**

$\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$ **sur [0 ; 2,5]**

3. On en déduit le tableau de variation :

x	0		2,5		+∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$7{,}5e^{-1}$ $= \frac{7{,}5}{e}$	↘	

3a. $f(0) = 0$ (avant d'en prendre le sportif n'a pas de trace du produit dans le sang) donc le produit n'est pas naturellement présent dans l'organisme

b. Au bout de **2,5 heures** c'est-à-dire au bout de **2h30 min**, ce produit dopant sera présent en quantité maximale dans le sang du sportif

c.$\boldsymbol{f(6) = 18e^{-2{,}4} \approx 1{,}63}$

Au bout de 6 heures, le sportifs aura environ 1,63mg/L de produits dans le sang, ce qui est au-dessus du seuil qui est de 1,4 mg/L, le sportif sera donc **positif au contrôle anti-dopage.**