Nombre dérivé et tangente

I) Limite en zéro d'un nombre

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0\,[\;\cup\;]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{(2x+3)^2-9}{x}$

On ne peut pas calculer l'image de 0 par f, la fonction n'étant pas définie en 0 (on ne peut pas diviser par 0). Nous allons nous intéresser aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.
Pour cela utilisons la calculatrice et faisons un tableau de valeur :

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	0	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	10	11,6	11,98	11,998	11,9998		12,0004	12,004	12,04	12,4	14

Plus x se rapproche de 0 plus l'image se rapproche de 12

Plus x se rapproche de 0 plus l'image se rapproche de 12

On constate que $f(x)$ se rapproche de 12 lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 12 et se note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 12$

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0\,[\;\cup\;]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

On ne peut pas calculer l'image de 0 par f, la fonction n'étant pas définie en 0 (on ne peut pas diviser par 0). Nous allons nous intéresser aux valeurs de$g(x)$ lorsque x se rapproche de 0.
Pour cela utilisons la calculatrice et faisons un tableau de valeur :

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	0	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5
$g(x)$	4	10^2	10^4	10^6	10^8		10^8	10^6	10^4	10^2	4

Plus x se rapproche de 0 plus l'image est grande.

Plus x se rapproche de 0 plus l'image est grande.

On remarque que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0, on dit que la limite de g lorsque x se rapproche de 0 est égale à $+\infty$ et on le note :

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$

Exemple 3 :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$
La fonction h est définie en 0 et dans ce cas $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0)$

$h(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$

Définition :

On dit que la fonction $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers un nombre a si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut, à condition de prendre x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Cette expression se lit : « La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est égale à L ».

Exemple : Soit la fonction $f(x) = \frac{2x^3-5x^2+7x}{x}$ pour $x \neq 0$ On veut sa limite en 0

Pour tout pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{2x^3-5x^2+7x}{x} = \frac{x(2x^2-5x+7)}{x} = 2x^2 - 5x + 7$

Lorsque x tend vers 0 : $2x^2$ tend vers 0 , $-5x$ tend vers 0 et donc $2x^2 - 5x + 7$ tend vers 7

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 7$

II) Taux de variation entre deux valeurs de la variable x d'une fonction f

1) Définition

Le taux de variation d'une fonction f entre a et b est :

$$t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Le nombre t est la pente (coefficient directeur) de la droite passant par les points A$(a\,;(f(a))$ et B$(b\,;f(b))$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3$.
Déterminer le taux de variation de f entre 2 et 5

Méthode :

On calcule $f(5)$: $f(5) = 2 \times 5^2 + 3 = 2 \times 25 + 3 = 53$
On calcule $f(2)$: $f(2) = 2 \times 2^2 + 3 = 8 + 3 = 11$
On applique la formule **:** $t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ en remplaçant b par 5 et a par 2 donc :
$t = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{53-11}{5-2} = \frac{42}{3} = 14$ Le taux de variation de f entre 2 et 5 est 14.

2) Taux de variation d'une fonction en un point.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a, soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On appelle A et B les points de $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives a et $a + h$
(h étant un réel non nul positif ou négatif).

Ainsi on a A (a ; $f(a)$) et B ($a + h$; $f(a+h)$)

La droite (AB) a pour coefficient directeur $m = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$

Ce nombre m est appelé taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$

Remarque : La droite (AB) est quelquefois appelée ***corde*** à la courbe $(\mathscr{C})$ en A

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2$

La courbe de f est représentée sur la figure ci-contre, avec $a = 1,5$.
Ainsi :

$f(a) = f(1,5) = 0,25$ et soit $h \neq 0$

$f(a+h) = f(1,5+h) = (h+0,5)^2$

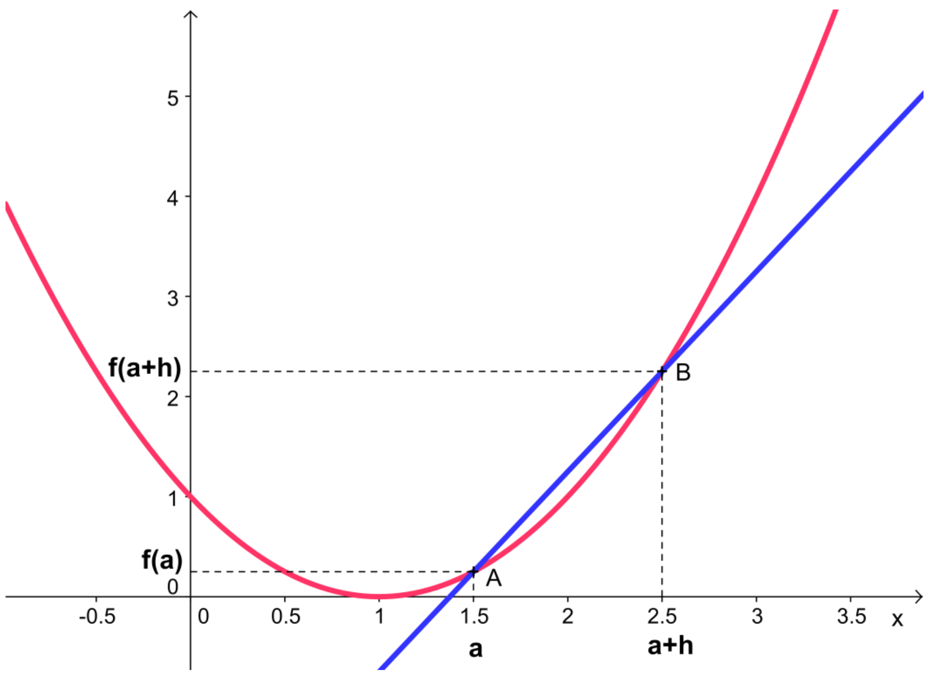
De là le taux de variation de f entre 1,5 et 1,5+h vaut :

$m = \dfrac{(h+0,5)^2 - 0,25}{h} = \dfrac{h^2 + h + 0,25 - 0,25}{h}$

$m = \dfrac{h^2 + h}{h}$

$m = \dfrac{\cancel{h}(h+1)}{\cancel{h}}$ comme $h \neq 0$ alors

$m = h + 1$



3) Tangente et nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a, soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On appelle A et B les points de $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives a et $a+h$ (h étant un réel non nul positif ou négatif).

Soit m le taux de variation de f en a.

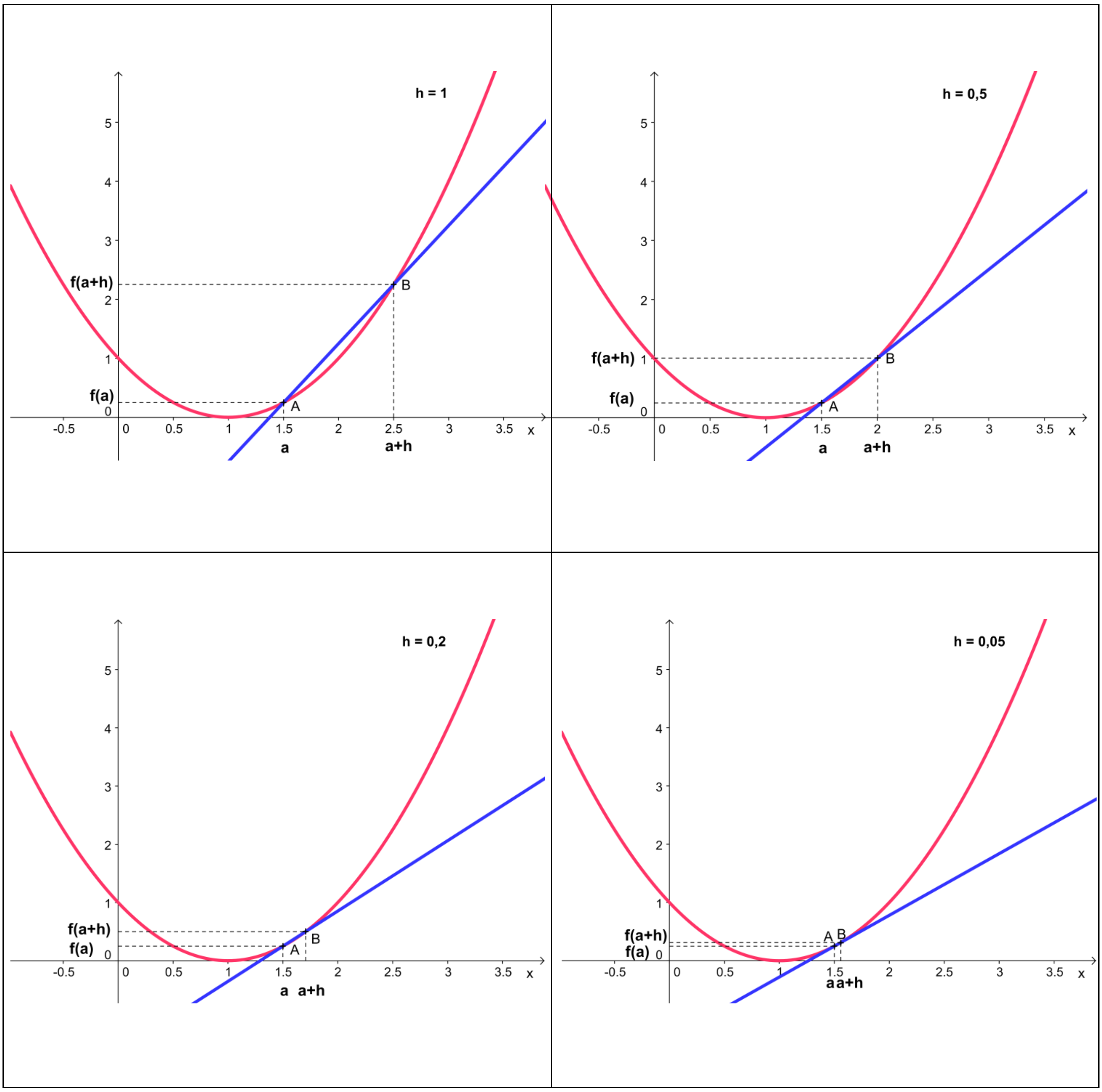
On déplace le point B sur la courbe $(\mathscr{C})$ en le rapprochant de A (on dit que l'on fait tendre B vers A) et on étudie le comportement du nombre m.

Par conséquent on étudie le comportement de m lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de zéro. (On dit que h tend vers 0).

Exemple :

On reprend l'exemple précédent : $f(x) = (x-1)^2$ et $a = 1,5$

1°) Figures obtenues :



A l'aide des graphiques ci-dessus on peut conjecturer que lorsque B tend vers A, c'est à dire lorsque h tend vers zéro, la droite (AB) semble prendre une position limite, dont le coefficient directeur serait la valeur prise par m lorsque h devient nul.

On appelle cette valeur (si elle existe) la ***limite de m lorsque h tend vers zéro***

Dans cet exemple on a $m = h + 1$ donc la limite de m lorsque h tend vers zéro est 1, que l'on on note :

$$\lim_{h \to 0} m = 1$$

La droite (AB) prend donc une « position limite » et dans cette position, elle est appelée **tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 1,5** donc le coefficient directeur est 1.

III) Fonction dérivable en un point et nombre dérivé.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a, soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On dit que la fonction f est dérivable au point d'abscisse a si et seulement si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers zéro. On note :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a. On le note $f'(a)$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemples :

1°) Soit $f(x) = x^2 - 3$, calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 3

Calcul du taux de variation : calculons $f(3)$ et $f(3+h)$

$f(3) = 3^2 - 3 = 6$

$f(3+h) = (3+h)^2 - 3 = 9 + 6h + h^2 - 3 = h^2 + 6h + 6$

donc $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{h^2+6h+6-6}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} = 6 + h$

Calcul de la limite lorsque h tend vers zéro :

$$\lim_{h\to 0}(6+h) = 6$$

D'où f est dérivable au point d'abscisse 3 et $f'(3)=6$

2°) Soit $f(x) = \frac{4x}{x+2}$ Calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 0

Calcul du taux de variation : calculons $f(0)$ et $f(0+h)$

$f(0) = 0$

$f(0+h) = \frac{4h}{h+2}$

donc $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{4h}{h+2}}{h} = \frac{4}{h+2}$

Calcul de la limite lorsque h tend vers zéro :

$\lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{h+2}\right) = \frac{4}{2} = 2$

D'où f est dérivable au point d'abscisse 0 et $f'(0) = 2$

3°) Soit $f(x) = \sqrt{x}$ **.** Calculons, s'il existe, le nombre dérivé de f au point d'abscisse 0

Remarque : la question peut être posée puisque f est définie en zéro

Calcul du taux de variation :

$f(0) = \sqrt{0} = 0$

$f(0+h) = \sqrt{h}$

donc $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

On constate que le taux de variation prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque h tend vers zéro, donc il n'existe pas de réel représentant sa limite.

f n'est pas dérivable en zéro, le nombre dérivé de f en zéro n'existe pas.

IV) Tangente à une courbe en un point

1) Tangente à une courbe en un point

Soit f une fonction dérivable en a, ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative et A le point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse a.

La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A (a ; $f(a)$) est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque : La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe ($\mathscr{C}$) au voisinage du point A.

2) Equation de la tangente

Soit f une fonction dérivable en a, ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative et A le point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse a.

La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A a pour équation :

$$\boldsymbol{y = f(a) + (x - a)\ f'(a)}$$

Remarque : La tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe ($\mathscr{C}$) au voisinage du point A.

Démonstration :

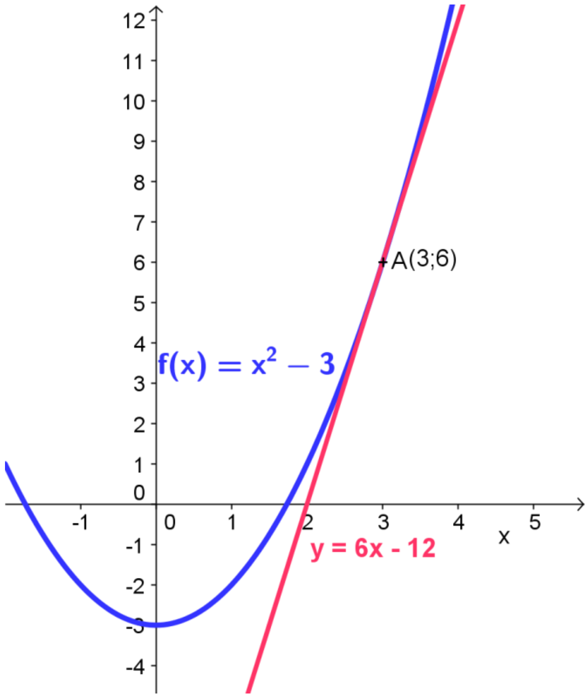
D'après la définition la tangente T à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse à une équation de la forme : $y = f'(a)\,x + b$
Comme A(a ; $f(a)$) appartient à T on a : $f(a) = f'(a)a + b$ d'où $b = f(a) - f'(a)a$

Donc on obtient $y = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ et finalement $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exemples :

1°) Donner une équation de la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$ au point d'abscisse 3

On a vu précédemment que $f'(3) = 6$ de plus $f(3) = 6$ donc une équation de cette tangente est :
$y = 6(x - 3) + 6$ soit $y = 6x - 12$



2°) Donner une équation de la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x}{x+2}$ au point d'abscisse 0.

On a vu précédemment que $f'(0) = 2$ de plus $f(0) = 0$ donc une équation de cette tangente est : $y = 2x$

$$y = 2x$$