Définition du produit scalaire

I) Norme d'un vecteur :

1) Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur, A et B deux points tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle norme de $\vec{u}$, noté $\| \vec{u} \|$, la distance AB.

$\| \vec{u} \|$ = $\| \overrightarrow{AB} \|$ = AB

Lorsque $\| \vec{u} \|$ = 1, on dit que le vecteur est unitaire.

2) Propriétés:

Dans un repère orthonormé, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y)$.

Dans ce cas :

● $\| \vec{u} \|$ = $\sqrt{x^2 + y^2}$

● Pour tout réel λ, et tout vecteur $\vec{u}$ alors $\|\lambda \vec{u} \|$ = $|\lambda| \times \| \vec{u} \|$

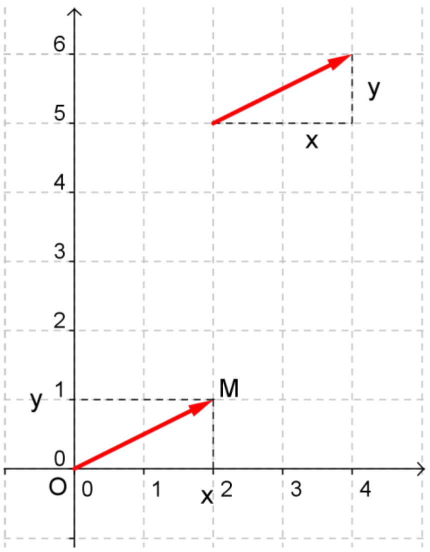
Démonstration :

● Dans un repère orthonormé, d'origine O, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y)$.

Dans ce repère, M est le point tel que $\overrightarrow{OM}$ = $\vec{u}$.

M a aussi pour coordonnées $(x ; y)$

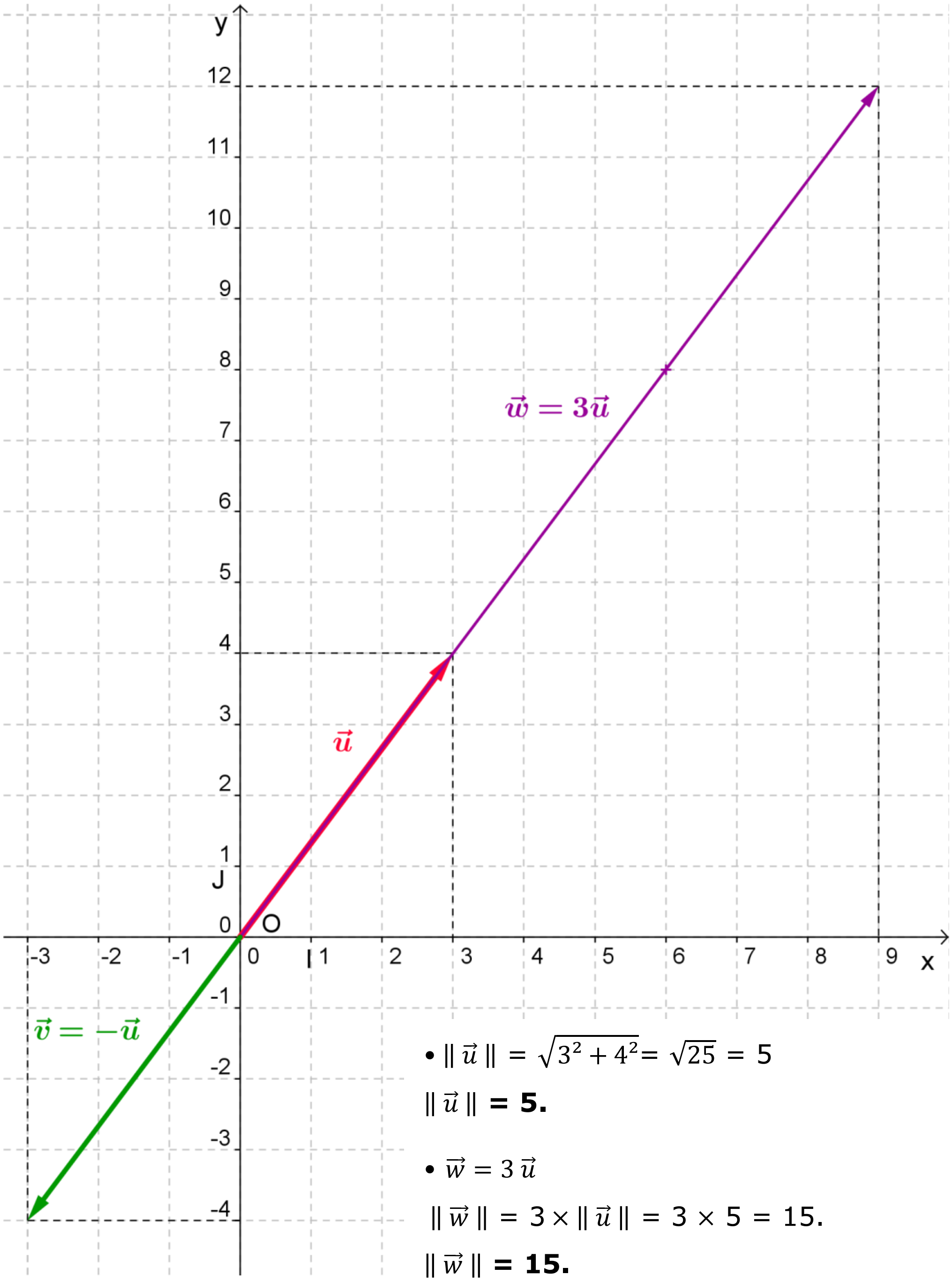
$\| \vec{u} \|$ = OM = $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$ = $\sqrt{x^2 + y^2}$



● Pour tout réel λ, le vecteur $\lambda \vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x ; \lambda y)$.

De ce fait : $\|\lambda \vec{u} \|$ = $\sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}$ = $\sqrt{(\lambda^2(x^2 + y^2)}$ =$\sqrt{\lambda^2}$ × $\sqrt{x^2 + y^2}$ = $|\lambda| \times \sqrt{x^2 + y^2}$ = $|\lambda| \times \| \vec{u} \|$

Exemple :



• $\| \vec{u} \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\| \vec{u} \|$ **= 5.**

• $\vec{w} = 3\,\vec{u}$

$\| \vec{w} \| = 3 \times \| \vec{u} \| = 3 \times 5 = 15.$

$\| \vec{w} \|$ **= 15.**

• $\vec{v} = -\,\vec{u}$

$\| \vec{v} \| = 1 \times \| \vec{u} \| = 1 \times 5 = 5.$

$\| \vec{v} \|$ **= 5.**

II) Définition du produit scalaire :

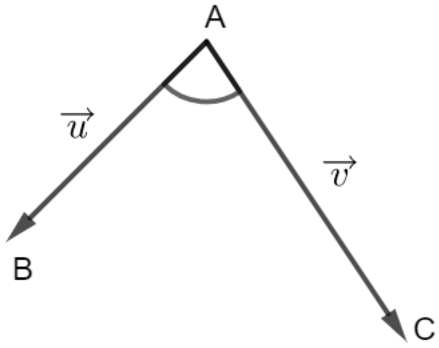
1) Définition :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, et A, B et C trois points tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le nombre :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ dans les autres cas.

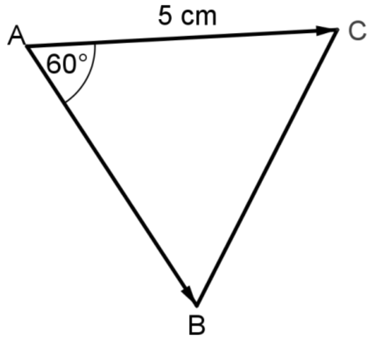


Remarque :

Par convention : $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$, ainsi $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

2) Exemples

Exemple 1 : ABC est un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est de 5 cm.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



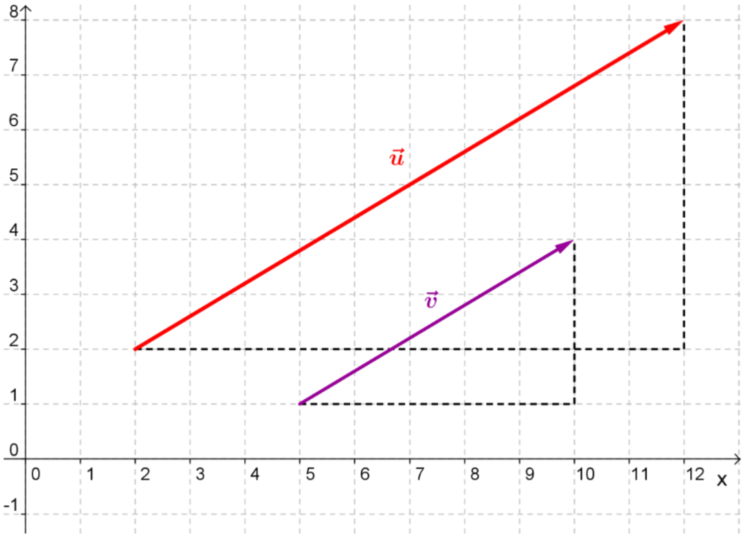
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(60°)$

$= \frac{1}{2} \times AB \times AC$

$= \frac{1}{2} \times 5^2 = \frac{25}{2}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12{,}5$

Exemple 2 : Déterminer le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tracés ci-dessous :



Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont : $\vec{u}$ (5 ; 3)
Les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont : $\vec{v}$ (10 ; 6)

$\| \vec{u} \|^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$ $\qquad$ $\| \vec{u} \| = \sqrt{34}$

$\| \vec{v} \|^2 = 10^2 + 6^2 = 100 + 36 = 136$ $\qquad$ $\| \vec{v} \| = \sqrt{136}$

$\vec{v} = 2 \times \vec{u}$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens donc le cosinus de l'angle formé par les 2 vecteurs est égal à 1

Donc $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ **=** $\sqrt{34} \times \sqrt{136}$ **=** $\sqrt{4624}$ **= 68.**

Exemple 3 : Dans un triangle ASM, AS=10, AM=5 et l'angle $\widehat{SAM} = 120°$.

Calculer : $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AM} = \|\overrightarrow{AS}\| \times \|\overrightarrow{AM}\| \times \cos(S\hat{A}M) = 10 \times 5 \times \cos(S\hat{A}M) = 50 \times \cos(120°) = -0,5 \times 50 = -25$

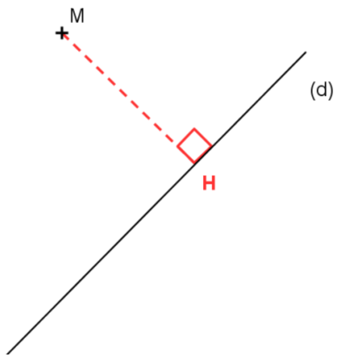
$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{-AS}.\overrightarrow{AM} = -(-25) = 25$

3) Produit scalaire et projeté orthogonal :

a) Projeté orthogonal:

(d) est une droite et M un point du plan.

Le projeté orthogonal de M sur la droite (d) est le point H intersection de la perpendiculaire à (d) passant par le point M et de (d).



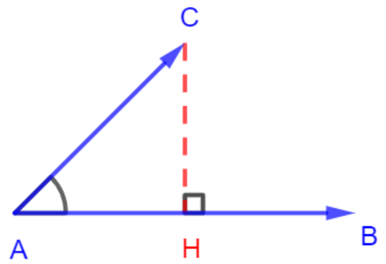
b) Propriété

Soit A, B et C trois points du plan(A et B non confondus)

Soit H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

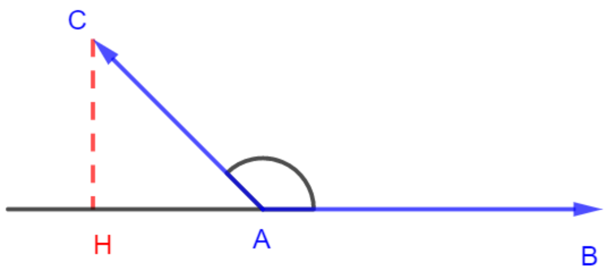
Si $\widehat{BAC} < \frac{\pi}{2}$ (angle aigu) alors

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$



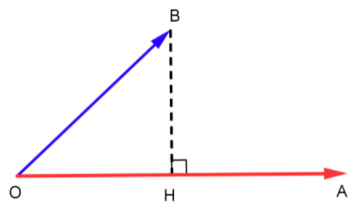
Si $\widehat{BAC} > \frac{\pi}{2}$ (angle obtus) alors

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$



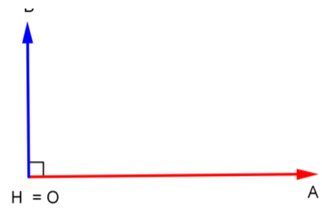
Remarques :

L'angle $\widehat{AOB}$ est aigu



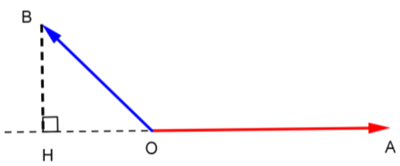
$\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = OA \times OH$

L'angle $\widehat{AOB}$ est droit



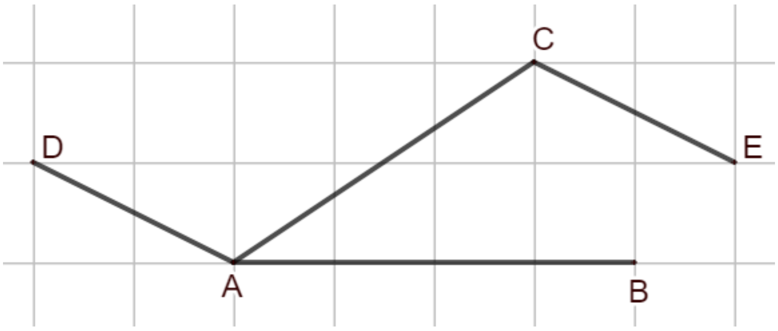
$\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = 0$

L'angle $\widehat{AOB}$ est obtus



$\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

Exemple :

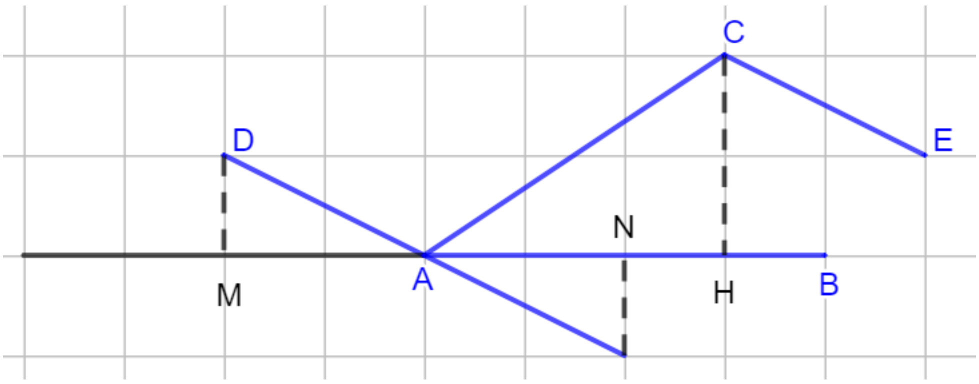


AB=4, Déterminer, en utilisant le graphique, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Soit M le projeté orthogonal de D sur la droite (AB)

On trace le vecteur égal à $\overrightarrow{CE}$ passant par A et le projeté orthogonal N de l'extrémité de ce vecteur sur la droite (AB)



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 4 \times 3 = 12$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = AB \times AN = 4 \times 2 = 8$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -AB \times AM = -4 \times 2 = -8$

IV) Cas particuliers

1) Vecteurs colinéaires

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires.

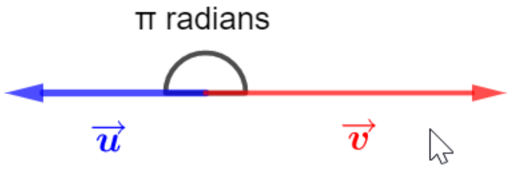
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans le même sens alors $\vec{u}.\vec{v}$ = $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans le sens opposé alors $\vec{u}.\vec{v}$ = $-\ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Démonstration :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires de même sens alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(0°) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ car $cos(O) = 1$

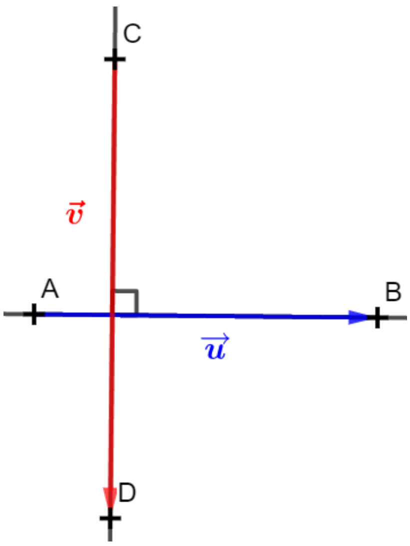
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires de sens opposés alors
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi)$ l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesure 180° soit π radians
Or $\cos(\pi) = -1$ donc
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$



2) Vecteurs orthogonaux

a. Définition :

> **On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.**
>
> **Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.**



b. Propriété :

> **Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :**
>
> **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont vecteurs orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.**

Démonstration :

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul l'équivalence est évidente.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls : soient A, B et C trois points distincts tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
$\vec{u}.\vec{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ si et seulement si $AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 0$
si et seulement si $\cos(\widehat{BAC}) = 0$ puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls et donc A distinct de B et A distinct de C
$\cos(\widehat{BAC}) = 0$ si et seulement si $\widehat{BAC}$ est droit

3) Carré scalaire

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Le carré scalaire de $\vec{u}$ noté $\vec{u}^2$ est le nombre $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$

Par conséquent : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

III) Propriétés du produit scalaire

1) Propriété de symétrie du produit scalaire

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Démonstration : On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos\big(-(\vec{v}\,;\,\vec{u})\big)$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{v}\,;\,\vec{u})$
$= \vec{v}.\vec{u}$

2) Produit scalaire et opérations

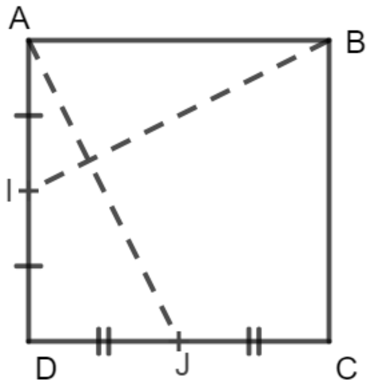
Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$, **avec k un nombre réel.**

Exemple : ABCD est un carré. I est le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]

Calculer $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI}$



$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = (\overrightarrow{AD} + \cdot \overrightarrow{DJ}) . \overrightarrow{BI} =$

$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BI} =$

$AD \times AI + (-DJ \times AB) =$

$AB \times DJ - DJ \times AB = 0$

car $AD = AB$ et $AI = BJ$

Les droites (AJ) et (BI) sont perpendiculaires.

3) Produit scalaire et identités remarquables

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Exemple : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tel que $\|\vec{u}\| = 3$ $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v}$ =-2.

Calculer $(\vec{u} + \vec{v})^2$; $(\vec{u} - \vec{v})^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 3^2 + 2 \times (-2) + 2^2 = 9 - 4 + 4 = 9$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 3^2 - 2 \times (-2) + 2^2 = 9 + 4 + 4 = 17$

$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

IV) Autres expressions du produit scalaire

1) Produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété 1 :

Dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x ; y)$ et $(x'; y')$, alors : $\vec{u} . \vec{v} = xx' + yy'$.

Exemple 1 : Dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(-2; 5)$ et $(3; 1)$. Calculons leur produit scalaire.

$\vec{u} . \vec{v} = (-2) \times 3 + 5 \times 1 = -6 + 5 = -1$

On obtient donc :

$\vec{u} . \vec{v} = -1$

Exemple 2 : Soit A, B, C et D quatre points du plan dont les coordonnées sont :

A(-1 ;2) , B(5 ;0) ; C(3 ;4) et D(6 ;13).

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ si et seulement si : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5+1 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$ si et seulement si : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6-3 \\ 13-4 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 6 \times 3 + (-2) \times 9 = 18 - 18 = 0$

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exemple 3 : $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ Calculer $(\vec{u} + \vec{v})^2$

$\|\vec{u}\|^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$

$\|\vec{v}\|^2 = 5^2 + (-2)^2 = 25 + 4 = 29$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 + 5 \times (-2) = 15 - 10 = 5$

Donc $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 34 + 2 \times 5 + 29 = 34 + 10 + 29 = 73$

3) Produit scalaire et norme

Propriété :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Démonstration :

On sait que $(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Donc $2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

De même on sait que :

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ donc

$-2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Conséquence : Soient A, B et C trois points, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\|^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2) =$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2)}$

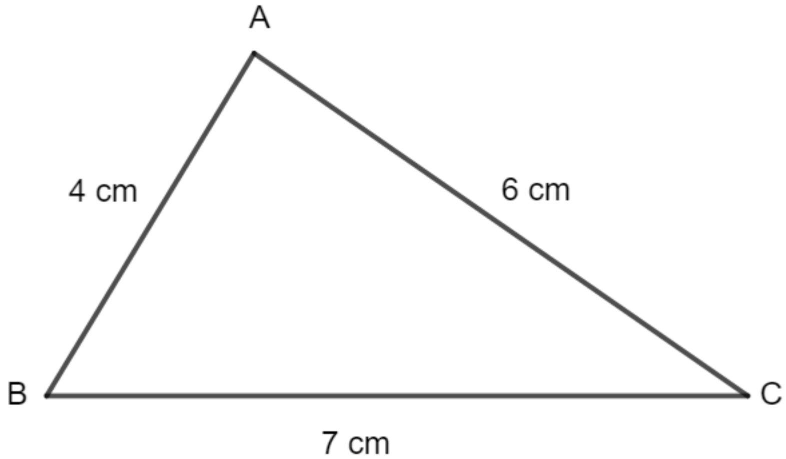
Exemple : A, B et C est un triangle tel que AB = 4 cm ; AC=6 cm et BC=7 cm

1) Tracer la figure

2) Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de AB, BC et AC.

3) en déduire la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Correction :
1)



2) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2)$

3) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(6^2 - 4^2 - 7^2) = \frac{1}{2}(36 - 16 - 49) = -14{,}5$

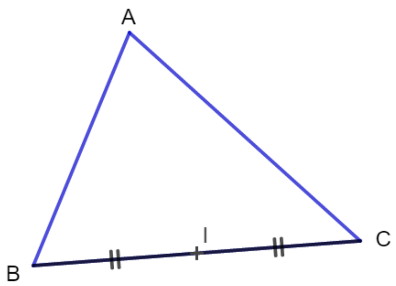
$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}} = -14{,}5$

V) Caractérisation d'un cercle par le produit scalaire

1) Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

Soient A et B deux point du plan, I milieu du segment [AB], pour tout point M du plan on a :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2}$$



Démonstration : $\boldsymbol{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\cdot\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}.+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}}$

Or $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{MI}.+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = MI^2 + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

De plus $\overrightarrow{IA} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ *et* $\overrightarrow{IB} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ *donc* $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

2) Ensemble des points du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si : $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0$ si et seulement si $MI^2 - (\frac{1}{2}\mathrm{AB})^2 = 0$

Si et seulement si $MI^2 = \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2$ (les distances étant des nombres positifs)

$MI^2 = \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2$ si et seulement si : $MI = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$ si et seulement si : M appartient au cercle de diamètre [AB].

VI) formule d'Al-Kashiv (ou théorème de Pythagore généralisé)

Soit ABC un triangle alors on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

En posant $a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$ alors on a

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \hat{A}$ **de même on a :**

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Remarques :

- Ce théorème permet de déterminer les mesures d'un angle d'un triangle connaissant la longueur des trois côtés, ou de calculer la longueur d'un côté à partir de la longueur des deux autres côtés ainsi que son angle opposé.

- Lorsque $\hat{A}$ =90° on retrouve le théorème de Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$ car cos(90°) =0

Démonstration exigible :

BC²$=\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA})^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + BA^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$

Exemple 1 : ABC est un triangle tel que $AB = 3$ $BC = 5$ et $AC = 7$

Déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$

$5^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \times 3 \times 7 \times cos(\widehat{BAC})$

$25 = 9 + 49 - 42 \times cos(\widehat{BAC})$ donc $25 = 58 - 42 \times cos(\widehat{BAC})$

$cos(\widehat{BAC}) = \frac{25-58}{-42} = \frac{33}{42} = \frac{11}{14}$ donc $\widehat{BAC} \approx 38°$ **arrondi à l'unité près.**

Exemple 2 : ABC est un triangle tel que AB=5 cm ; BC = 6 cm et $(\widehat{BAC}) = 40°$.
Déterminer la valeur de AC arrondi au dixième.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times cos(\widehat{ABC})$ donc $AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos(40°) \approx 15$ cm

AC mesure environ 15 cm arrondi au dixième près.