Droites et cercles dans un repère.
Application du produit scalaire.

I) Equation cartésienne de droite

1) Définition

Toute droite admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

a, b **étant des nombres réels non simultanément nuls et** c **un nombre réel quelconque.**

$\vec{u}\binom{-b}{a}$ **est un vecteur directeur de cette droite.**

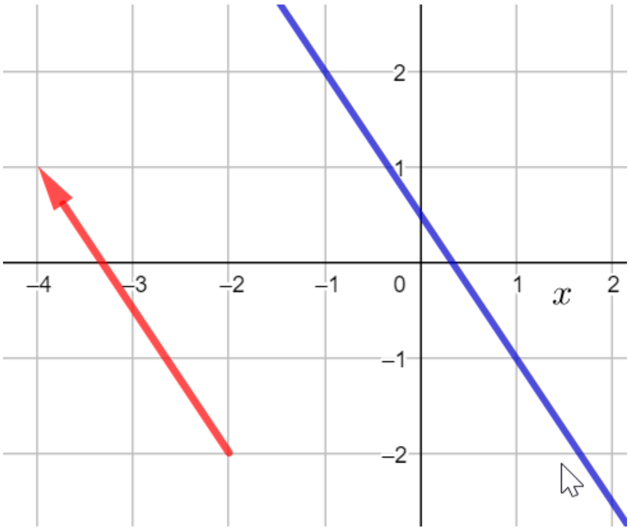
Remarques :

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes, en effet pour tout nombre réel k.

Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur qui a la même direction que cette droite.

$kax + kby + kc = 0$

Exemple :



Ci-contre, a été représenté la droite d'équation : $3x + 2y - 1 = 0$

Le vecteur $\vec{u}\binom{-2}{3}$ est un vecteur directeur de cette droite.

2) Parallélisme

d **et** d' **sont deux droites de vecteur directeur** $\vec{u}$ **et** $\vec{u'}$**, deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.**

Deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ **et** $\vec{u}'(x', y')$ **sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul c'est-à-dire si et seulement si** $xy' - x'y = 0$

Exemple 1 : Dans un repère (O ;$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) du plan, on considère une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\binom{3}{-2}$ et une droite $\mathcal{D}'$ de vecteur directeur $\vec{v}\binom{-6}{4}$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles ?

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc parallèles.

Exemple 2 : Dans un repère (O ;$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) du plan, une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\binom{0}{-2}$ est-elle parallèle à l'axe des ordonnées ?

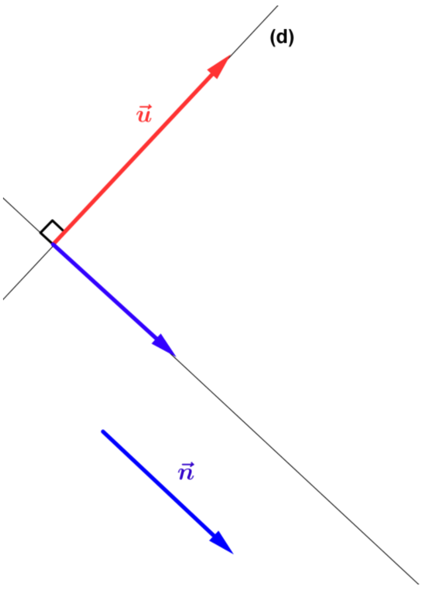
$\vec{\jmath}\binom{0}{1}$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées et $\vec{u}\binom{0}{-2}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$**.**

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
Or, $\vec{u} = -2\vec{\jmath}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{\jmath}$ sont colinéaires, donc la droite $\mathcal{D}$ est bien parallèle à l'axe des ordonnées.

3) Vecteur normal et équation de droite

a) Vecteur normal à une droite

Dire que $\vec{n}$ est un vecteur non nul normal à une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ signifie que $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

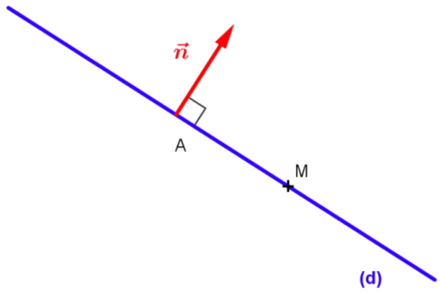


Conséquence : Caractérisation d'une droite par un point donné et un vecteur normal

Un point M appartient à la droite (d) passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire : si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \vec{0}$

Conséquence : Soit (d) la droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

La droite (d) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \vec{0}$



b) Vecteur normal d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$

Propriétés :

• Une droite (d) de vecteur normal $\vec{n}$ $(a\,;\,b)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel.

• La droite (d) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ **a pour vecteur normal $\vec{n}$ $(a\,;\,b)$.**

Démonstration :

• (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) est un repère orthonormé du plan.

A(x_0 ; y_0) est un point de la droite (d) de vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b). Un point M (x ; y) appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{AM}(x - x_0\ ;\ y - y_0)$ et $\vec{n}$ $(a\ ;\ b)$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \vec{0}$ si et seulement si $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ qui est équivalent à :

$ax + by - ax_0 - by_0 = 0$ qui est équivalent à :

$ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_0 - by_0$

• Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) une droite (d) d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}$ (-b ; a).

Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (a ; b).

$\vec{u}.\vec{n} = -ba + ab = 0$, donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur directeur de la droite (d)

Ce qui revient à dire que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

c) Exemples :

Exemple 1 : Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-3}{1}$ passant par le point A (2 ;5)

Réponse :

Toute droite d'équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ donc par indentification $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ étant le vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$,

$a = 1$ et $b = 3$, l'équation cartésienne de la droite est donc : $x + 3y + c = 0$

Or A (2 ;5) $\in \mathcal{D}$,en remplaçant x par 2 et y par 5 on obtient : $2 + 3 \times 5 + c = 0$

Donc $c = -17$

L'équation cartésienne de la droite $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ passant par le point A (2 ;5) est $x + 3y - 17 = 0$

Exemple 2 : Soit $\mathcal{D}$ une droite dont l'équation cartésienne est $-2x + 4y + 5 = 0$

Donner les coordonnées d'un vecteur normal à cette droite.

Donner les coordonnées d'un vecteur directeur à cette droite.

Réponse :

Toute droite d'équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$ et pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Par identification un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $-2x + 4y + 5 = 0$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ mais le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal à $\mathcal{D}$ tout comme $\vec{u}\binom{2}{1}$ est un vecteur directeur à $\mathcal{D}$.

Exemple 3 :

Dans un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) du plan on considère le cercle de centre Ω (3 ; 4) passant par les points A(4 ; 8) B(2 ; 0) et C(-1 ; 5)

Déterminer une équation cartésienne des droites suivantes :

a) La médiatrice du segment [BC]

b) La hauteur du triangle ABC issue de B

c) La tangente en A au cercle $\mathscr{C}$

Réponse :

a) La médiatrice du segment [BC] est la droite (d_1) passant par le milieu I du segment [BC] et perpendiculaire à (BC), donc la droite (d_1) passe par le point I et a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

Une équation cartésienne de la droite (d_1) est donc de la forme :

-3x + 5y + c = 0

I le milieu de [BC] a pour coordonnées : I ($\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$)

I appartient à la droite, ses coordonnées vérifient l'équation de (d_1) :

$-3 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{5}{2} + c = 0$

On obtient : c = $-\frac{22}{2}$ = -11

Une équation cartésienne de la médiatrice (d_1) du segment [BC] est donc :

$-3x + 5y - 11 = 0$

b) La hauteur issue de B est la droite (d_2) passant par le point B, perpendiculaire au côté [AC], donc la droite (d_2) passe par le point B et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$

Une équation cartésienne de la droite (d_2) est donc de la forme :

$-5x - 3y + c = 0$

B (2 ; 0) appartient à la droite, ses coordonnées vérifient l'équation de (d_2) :

$-5 \times 2 - 3 \times 0 + c = 0$

On obtient : c = 10

Une équation cartésienne de la hauteur (d_2) issue de B est donc :

$-5x - 3y + 10 = 0$

c) La tangente (d_3) en A au cercle ($\mathscr{C}$) de centre Ω est la droite passant par A perpendiculaire au rayon [Ω A].

(d_3) est donc la droite passant par le point A de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.

$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}4-3\\8-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

Une équation cartésienne de la droite (d_3) est donc de la forme :

$x + 4y + c = 0$

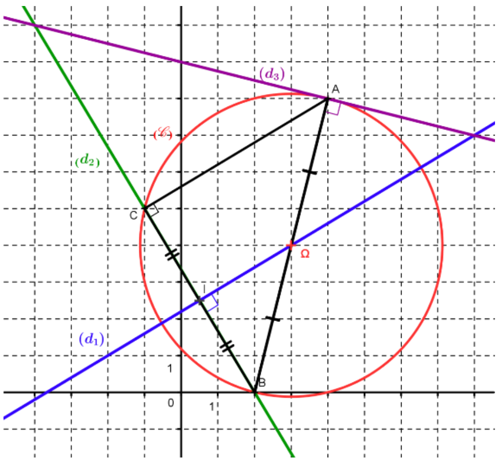
A (4 ; 8) appartient à la droite, ses coordonnées vérifient l'équation de (d_3) :

$4 + 4 \times 8 + c = 0$

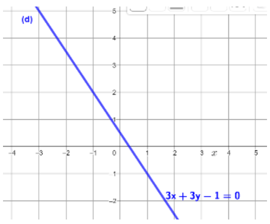
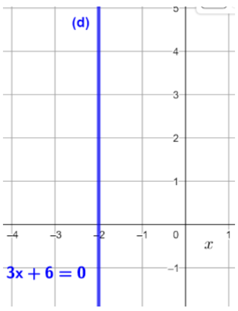
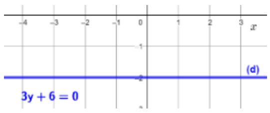
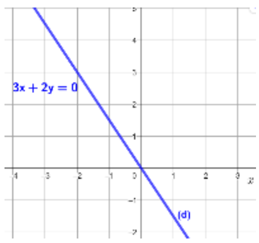
On obtient : c = -36

Une équation cartésienne de la tangente (d_3) en A au cercle ($\mathscr{C}$) est donc :

$x + 4y - 36 = 0$



4) Equation de droite : récapitulatif

	$a \neq 0$; $b \neq 0$ et $c \neq 0$	$a \neq 0$; $b = 0$ et $c \neq 0$	$a = 0$; $b \neq 0$ et $c \neq 0$	$a \neq 0$; $b \neq 0$ et $c = 0$
Equation cartésienne	$ax + by + c = 0$	$ax + c = 0$	$by + c = 0$	$ax + by = 0$
Vecteur directeur	$\vec{u}\binom{-b}{a}$	$\vec{u}\binom{0}{a}$	$\vec{u}\binom{-b}{0}$	$\vec{u}\binom{-b}{a}$
Vecteur normal	$\vec{n}\binom{a}{b}$	$\vec{n}\binom{a}{0}$	$\vec{n}\binom{0}{b}$	$\vec{n}\binom{a}{b}$
Equation réduite	$y = mx + p$ p est l'ordonnée à l'origine , m le coefficient directeur $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{a}$	$x = constante$ $x = -\frac{c}{a}$	$y = constante$ $y = -\frac{c}{b}$	$y = mx$ $y = -\frac{b}{a}$
Représentation graphique				

Exemple : Dans un repère (O ;$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) du plan, on donne la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $3x - 2y + 5 = 0$

1. Déterminer un point appartenant à $\mathcal{D}$
2. Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{D}$.

Réponse :

1. Soit $x = 0$ en remplaçant dans l'équation cartésienne x par 0 on obtient $3 \times 0 - 2y + 5 = 0$
si et seulement si $y = -\frac{5}{2}$ donc le point de coordonnées (0 ; $-\frac{5}{2}$) appartenant à $\mathcal{D}$

Soit $x = 1$ en remplaçant dans l'équation cartésienne x par 1 on obtient $3 \times 1 - 2y + 5 = 0$
si et seulement si $y = 4$ donc le point de coordonnées (1 ;4) appartenant à $\mathcal{D}$

2. $3x - 2y + 5 = 0$ si et seulement si $2y = 3x + 5$ si et seulement si $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$
Son équation réduite est donc $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

II) Equation cartésienne d'un cercle:

1) Cercle défini par son centre et son rayon

a) Propriétés :

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre Ω (x_0 ; y_0) et de rayon r.

Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

b) Démonstration :

Un point M(x ; y) appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω (x_0 ; y_0) et de rayon r si et seulement si $\Omega M^2 = r^2$ ce qui est équivalent à :

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

c) Exemple :

Le cercle de centre Ω (3 ; 5) et de rayon 8 cm a pour équation :

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 8^2$

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 64$

2) Cercle défini par un diamètre

a) Propriété :

Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

b) Démonstration :

Le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] si et seulement si le triangle AMB est rectangle en M, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux ce qui est équivalent à dire que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

Pour obtenir l'équation d'un cercle : L'ensemble des points M (x ; y) appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] si et seulement si : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) Exemple :

Donner l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] où A(3 ; −2) et B(−3 ; 4) :

M(x ; y) appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AM}$ $(x - 3 ; y + 2)$ et $\overrightarrow{BM}$ $(x + 3 ; y - 4)$ on obtient donc :

M ∈ $\mathscr{C}$ si et seulement si $(x - 3)(x + 3) + (y + 2)(y - 4) = 0$

$x^2 - 9 + y^2 - 8 - 2y = 0$ qui est équivalent à $x^2 + y^2 - 2y - 17 = 0$

L'équation du cercle $\mathscr{C}$ est donc $x^2 + y^2 - 2y - 17 = 0$

3) Reconnaitre une équation de cercle

Exemples

Exemple 1 : Quel est le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$

En utilisant des formes canoniques :

$\boldsymbol{x^2 - 10x} + \boldsymbol{y^2 - 4y} + 13 = 0$

$\boldsymbol{x^2 - 10x + 25 - 25} + \underbrace{\boldsymbol{y^2 - 4y + 4}} - 4 + 13 = 0$

$(x - 5)^2 \quad + \quad (y - 2)^2 \quad - 25 - 4 + 13 = 0$

$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 - 16 = 0$

$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$

$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$

Le centre du cercle $\mathscr{C}$ est Ω (5 ; 2) et son rayon R = 4

Exemple 2 : Quel est le centre et le rayon du cercle d'équation :

$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 18 = 0$

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 7$

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = \sqrt{7}^2$

Le centre du cercle $\mathscr{C}$ est Ω (-3 ; 4) et son rayon R = $\sqrt{7}$