Probabilités conditionnelles et indépendance

I) Probabilités conditionnelles

1) Définition

Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé. On le note $P_A(B)$ et on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Rappel : $A \cap B$ (l'intersection) est l'ensemble des issues appartenant à la fois à A et à B.

Remarques :

- $P_A(B)$ est une probabilité conditionnelle : la condition est exprimée par « sachant que A est réalisé. »
- On écrit aussi : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
- Si $P(B) \neq 0$ on a aussi $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.
- Aussi en général, $P_B(A) \neq P(B)$

Exemple 1 : Dans une classe de Première 55% des élèves sont des filles et 40% des élèves sont des filles demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille.

Soit F l'évènement : « être une fille » et D l'évènement : « être demi-pensionnaire »

$$P_F(D) = \frac{p(F \cap D)}{p(F)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{40}{55} = \frac{8}{11}$$

Exemple 2 : Un professeur de mathématiques trie sa bibliothèque dans laquelle figure 32 manuels de différents niveaux, certains conformes aux programmes actuels et d'autres, plus vieux ne sont pas conformes. La répartition des manuels est donnée dans le tableau suivant :

	Conforme	**Non conforme**	**Total**
Seconde	**6** ($S \cap C$)	**7** ($S \cap \bar{C}$)	**13**
Première	**3** ($P \cap C$)	**5** ($P \cap \bar{C}$)	**8**
Terminale	**5** ($T \cap C$)	**6** ($T \cap \bar{C}$)	**11**
Total	**14**	**18**	**32**

Il prend un manuel au hasard, et on considère les évènements suivants :

C : « Le manuel est conforme aux programmes actuels. »

S : « Le manuel est un manuel de seconde. »

T : « Le manuel est un livre de Terminale. »

Nombre de livres conformes

P(C) = $\frac{14}{32} = \frac{7}{16}$

Nombre total de livres

Nombre de livres de seconde

P(S) = $\frac{13}{32}$

Nombre total de livres

Nombre de livres de terminale

P(T) = $\frac{11}{32}$

Nombre total de livres

$P_C(T) = \frac{5}{14}$

Nombre de livres de **terminale conformes** ($T \cap C$)

Nombre total de livres **conformes**

Nombre de livres de première et terminale et conformes ($\bar{S} \cap C$)

$P_C(\bar{S}) = \frac{3+5}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

Nombre total de livres **conformes**

Nombre de livres **conformes en premières et terminales** ($\bar{S} \cap C$)

$P_{\bar{S}}(C) = \frac{3+5}{8+11} = \frac{8}{19}$

Nombre total de livres **de** première et terminale ($\bar{S}$)

Exemple 3:

1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi".
Donc $A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de pique".

Alors : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. Dans un jeu de 32 cartes nous avons 8 piques.
et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$. Dans un jeu de 32 cartes il y a un seul roi de pique.
Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :
$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$.

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un pique, on a une chance sur 8 d'obtenir le roi.

2) Propriétés :

Pour tout évènement :
$0 \leq P_A(B) \leq 1$ et
$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$

Démonstration :

● On sait que $A \cap B \subset A$, on a donc $0 \leq p(A \cap B) \leq p(A)$

Puisque p (A) >0 , en divisant l'inégalité par p(A), on en déduit : $0 \leq \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \leq \frac{p(A)}{p(A)}$

Donc $\mathbf{0 \leq P_A(B) \leq 1}$

● pour tous A et B : $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

Donc $p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = p(A)$

Comme p (A) ≠ 0 en divisant par p(A) on a :

$$\frac{p(A\cap B) + p(A\cap\bar{B})}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)}$$

$\frac{p(A\cap B)}{p(A)} + \frac{p(A\cap\bar{B})}{p(A)} = 1$ donc $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$

II) Arbre de probabilité

1) Partition de l'univers

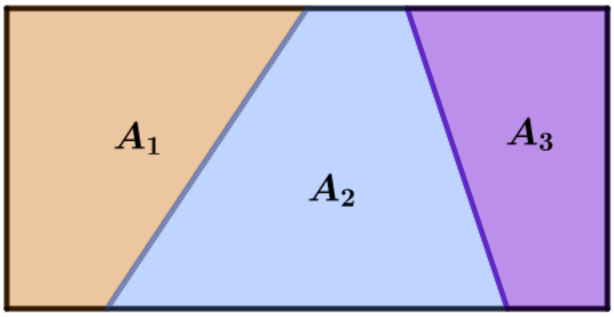
Soit A_1 ; A_2 et A_3 trois évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω .

On dit que A_1 ; A_2 et A_3 forment une partition de l'univers Ω lorsque :

- Les évènements sont 2 à 2 incompatibles (ou disjoints) :
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$; $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ et $A_2 \cap A_3 = \emptyset$

- Leur réunion est l'univers Ω

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$



Ω

Remarques :

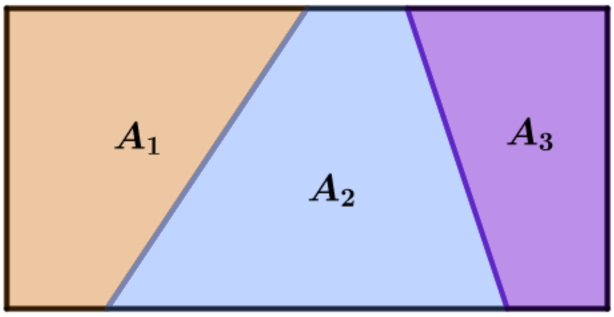
- Cette définition se généralise à un nombre n quelconque (supérieur ou égal à 2) d'évènements.

- A_1 ou A_2 forment une partition de Ω lorsque $\overline{A_2} = A_1$

Propriété :

Si A_1 ; A_2 et A_3 forment une partition de l'univers Ω alors :

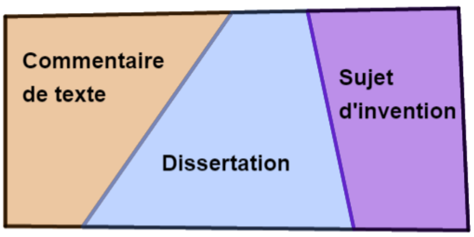
$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 1$



Ω

Exemple : On choisit au hasard un candidat au baccalauréat dans un lycée. La seconde partie de l'épreuve écrite de français consiste à traiter au choix un commentaire de texte (noté C), une dissertation (notée (D) et un sujet d'invention (noté I).

2ème partie de l'épreuve de Français :



Ω = 2ème partie de l'épreuve de Français

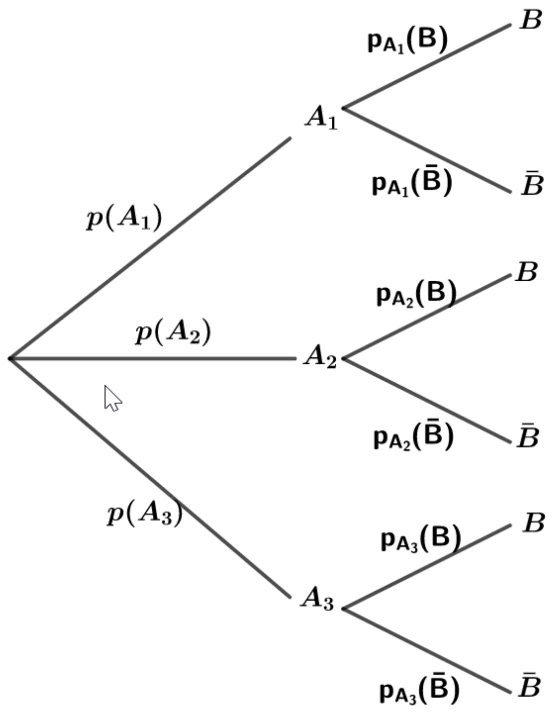
La deuxième partie Ω de l'épreuve propose trois exercices aux choix : le commentaire, la dissertation ou le sujet d'invention on a donc : $\boldsymbol{C \cup D \cup I = \Omega}$

De plus, un candidat ne peut choisir qu'un seul de ces trois exercices. Donc les événements C, D et I sont deux à deux incompatibles : $\boldsymbol{C \cap D = \emptyset}$ $\quad \boldsymbol{I \cap D = \emptyset}$ $\quad \boldsymbol{C \cap I = \emptyset}$

Les évènements C, D et I forment donc une partition de l'univers.

2) Règles de principe d'un arbre de probabilités

On peut représenter une expérience aléatoire par un arbre de probabilités à branches pondérées



• Sur les trois premières branchent se trouvent les probabilités des évènements A_1 , A_2 et A_3.

• Puis sur les autres branches se trouvent les probabilités conditionnelles de B ou $\bar{B}$ sachant A_1 , A_2 ou A_3.

• La somme des probabilités inscrites sur les branches d'un même nœud est égal à 1.

• La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur les branches du chemin.

$p(A_1 \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B)$
$p(A_2 \cap B) = p(A_2) \times p_{A_2}(B)$
$p(A_3 \cap B) = p(A_3) \times p_{A_3}(B)$

Remarques :

- si on permute les rôles de A et B on obtient un autre arbre. Il faut lire attentivement l'énoncé pour choisir l'arbre adapté à l'exercice. Si vous n'arrivez pas à avancer dans cotre exercice il est fort probable qu'il faille faire l'arbre dans l'autre sens.

- Un arbre pondéré correctement construit est une preuve même lors d'examen.

- Il faut construire l'arbre de manière claire, soignée afin de s'en servir tout au long de l'exercice.

- Soyez attentifs à la lecture de l'énoncé. Il faut distinguer 3 types de probabilités :

● Une probabilité « classique » tel que $p(A)$ (correspond au 1er niveau de l'arbre)

● Un probabilité « conditionnelle » tel que $p_{\mathrm{A}}(B)$ (correspond au 2ème niveau de l'arbre)

● Un probabilité « d'intersection » du type $p(A \cap B)$ (n'apparait pas sur l'arbre)

Exemple : Une petite chocolaterie détient trois usines de production (nommées usine 1, usine 2 et usine 3).

L'entreprise produit 1 500 ballotins de chocolats par jour dont :

- 450 sont produits par l'usine 1 ;
- 300 sont produits par l'usine 2 ;
- 750 sont produits par l'usine 3.

Les ballotins sont composés uniquement de chocolats noirs ou uniquement de chocolats au lait.

65 % des ballotins produits par l'usine 1 sont uniquement composés de chocolats au lait.,

20 % des ballotins produits par l'usine 2 sont uniquement composés de chocolats au lait.et 60 % des ballotins produits par l'usine 3 sont uniquement composés de chocolats au lait.

On choisit au hasard un ballotin produit par la chocolaterie. On note les événements suivants :

- U_1 : « le chocolat provient de l'usine 1 » ;
- U_2 : « le chocolat provient de l'usine 2 » ;
- U_3 : « le chocolat provient de l'usine 3 » ;
- L : « le ballotin est composé de chocolats au lait ».

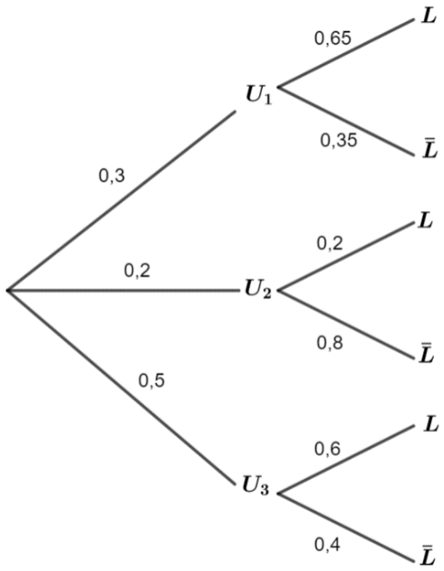
Ces données permettent de construire l'arbre de probabilités ci-dessous et de compléter les branches avec les probabilités suivantes :

450 + 300 +750 =1500

$p(U_1) = \frac{450}{1500} = 0{,}3$ $\quad P_{U_1}(\mathrm{L}) = \frac{65}{100} = 0{,}65$ $\quad P_{U_1}(\bar{L}) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$

$p(U_2) = \frac{300}{1500} = 0{,}2$ $\quad P_{U_2}(\mathrm{L}) = \frac{20}{100} = 0{,}2$ $\quad P_{U_2}(\bar{L}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$p(U_3) = \frac{750}{1500} = 0{,}5$ $\quad P_{U_3}(\mathrm{L}) = \frac{60}{100} = 0{,}6$ $\quad P_{U_3}(\bar{L}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$



$\mathrm{P}(U_1 \cap L) = 0{,}65 \times 0{,}3 = 0{,}195$

$\mathrm{P}(U_2 \cap L) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$

$\mathrm{P}(U_3 \cap L) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$

et

$\mathrm{P}(U_1 \cap \bar{L}) = 0{,}35 \times 0{,}3 = 0{,}105$

$\mathrm{P}(U_2 \cap \bar{L}) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$

$\mathrm{P}(U_3 \cap \bar{L}) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$

3) Formule de probabilité totale

La probabilité de B s'obtient en ajoutant les probabilités des branches qui aboutissent à B :

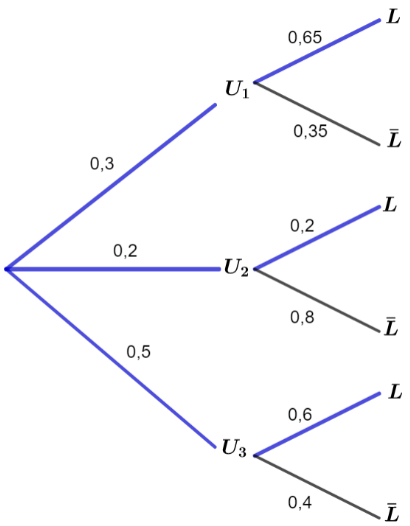
$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

Plus généralement, si $A_1 ; A_2 \ldots A_n$ forment une partition de l'univers c'est-à-dire $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ et les A_i sont deux à deux disjoints alors :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots + p(A_n \cap B)$$

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \ldots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

Exemple : En reprenant l'exemple et les résultats précédents déterminons la probabilité d'avoir du chocolat au lait p(L) :



Les branches qui correspondent à l'évènement L sont en bleues :

$P(L) = P_{U_1}(L) \times P(U_1) + P_{U_2}(L) \times P(U_2) + P_{U_3}(L) \times P(U_3)$

$P(L) = \mathrm{P}(U_1 \cap L) + \mathrm{P}(U_2 \cap L) + \mathrm{P}(U_3 \cap L)$

$P(L) = 0{,}65 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}6$

$P(L) = 0{,}195 + 0{,}04 + 0{,}3$

$\boldsymbol{P(L) = 0{,}535}$

III) Evènements indépendants

1) Définition

Si A et B sont deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

A et B sont indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "On tire un roi".
Soit B l'événement "On tire un pique".
Alors $A \cap B$ est l'événement "On tire le roi de pique".

On a :

$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 4 rois

$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 8 piques et

$P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 1 roi de pique

Donc $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$

Les événements A et B sont donc indépendants.
Ainsi, par exemple, $P_B(A) = P(A)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les piques et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

Contre-exemple :

On tire 1 jeton d'un sac contenant 6 jetons numérotés de 1 à 6.
Soit A : « le jeton est pair ».
Soit B : « le jeton vaut au moins 4 ».
On a : A = {2,4,6} et B ={4 ; 5 ; 6} et A∩B ={4 ; 6}
On obtient: $p(A) = \frac{3}{6}$ et $p(B) = \frac{3}{6}$

Donc : $p(A) \times p(B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Or $p(A \cap B) = \frac{2}{6}$

Donc $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ Donc A et B ne sont pas indépendants.

2) Propriété

Si A et B sont deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

A et B sont indépendants si et seulement si : $P_A(B) = P(B)$

Démonstration :

$P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Donc $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$

Réciproquement :

$P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ Si $P_A(B) = P(B)$ alors $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ d'où $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

Remarque importante : Il ne faut pas confondre évènements incompatibles et évènements indépendants. En effet, deux évènements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent se réaliser en même temps c'est-à-dire lorsque A ∩ B = ∅

Exemple : En reprenant l'exemple précédent :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "On tire un roi". Soit B l'événement "On tire un pique". On a :
$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 4 rois
$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 8 piques et
$P_B(A)$ se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les piques donc $P_B(A) = \frac{1}{8}$
$P(A)$ se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les toutes les cartes donc
$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
Donc $P_B(A) = P(A)$ On retrouve l'indépendance des deux évènements déjà montrée au 1)

3) Successions de deux épreuves indépendantes

a) Définition

Plusieurs épreuves sont identiques et indépendantes si

- **Elles ont les mêmes issues**
- **Chaque issue possède la même probabilité**

b) Propriété

On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités P(A) et P(B).

Si on répète l'expérience deux fois de suite :

- La probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à $P(A) \times P(B)$

- La probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à $P(B) \times P(A)$.

- La probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$.

- La probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

Exemples de Succession de deux épreuves indépendantes :

● On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).

● Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

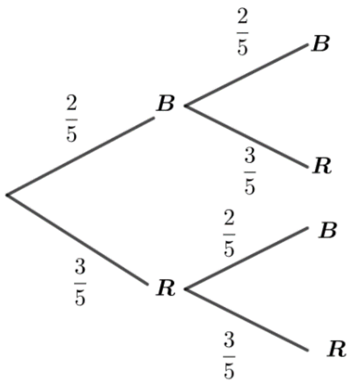
c) Exemple et méthode pour représenter la répétition d’expériences identiques et indépendantes dans un arbre :

On considère l’expérience suivante :
Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l’urne. On répète l’expérience Deux fois de suite.
1. Représenter l’ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2. Déterminer la probabilité :
- **a.** D’obtenir deux boules blanches
- **b.** D’obtenir une boule blanche et une rouge
- **c.** Au moins une boule blanche

Réponse :

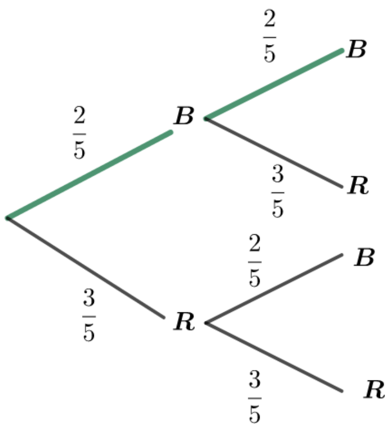
Tout d’abord nous allons faire un arbre en mettant les probabilités sur chaque branche.
On notera :
B l’évènement : « Obtenir une boule blanche » et
R l’évènement : « Obtenir une boule rouge »
Nous avons 5 boules, la probabilité d’avoir une blanche est $p(B) = \frac{2}{5}$ et la probabilité d’avoir une rouge est $p(R) = \frac{3}{5}$

1. L’arbre représentant l’expérience



2. La probabilité d’avoir deux boules blanches correspond à l’issue (B-B) , nous avons tracé en vert les branches correspondant à cette issue :

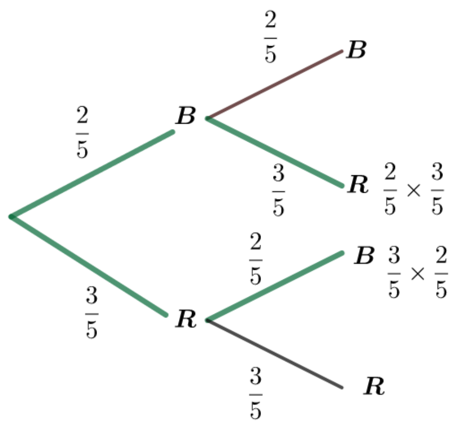
a.



On multiplie les probabilités des deux branches vertes correspondant à l’issue (B-B) :
$P(B\text{-}B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16$

Donc la probabilité d’avoir deux boules blanches est $\frac{4}{25}$ ou 0,16

b. La probabilité d'avoir une boule blanche et une rouge correspond aux issues (B-R) et (R-B) nous avons tracé en vert les branches correspondant à ces issues :

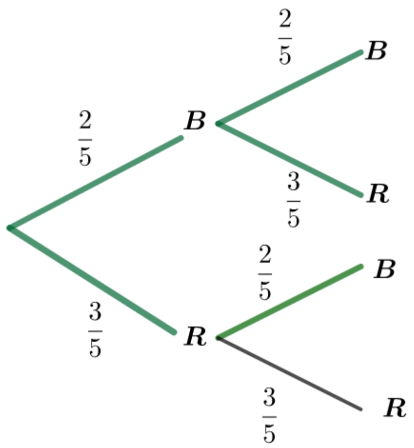


On additionne les probabilités des deux issues (B-R) et (R-B) nous avons tracé en vert les branches correspondant à ces issues :

P(B-R ou R-B) = $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$ = 0,48

Donc la probabilité d'avoir une boule blanche et une rouge est $\frac{12}{25}$ ou 0,48

C. La probabilité d'avoir au moins une boule blanche correspond aux issues (B-B) ; (B-R) et (R-B) nous avons tracé en vert les branches correspondant à ces issues :



On additionne les probabilités des trois issues (B-B) ; (B-R) et (R-B):
p(B) = $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4+6+6}{25} = \frac{16}{25}$ = 0,64

Donc la probabilité d'avoir au moins une boule blanche est $\frac{16}{25}$ ou 0,64 ;

Autre méthode :

L'évènement contraire $\overline{BB}$ est de n'avoir aucune boule blanche qui a pour probabilité :
P(B) = $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ donc la probabilité d'avoir au moins une boule blanche est p=1$-\frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ = 0,64

Remarques :
Pour une expérience dont le nombre d'issues est supérieur à 2, le principe reste le même.
Pour une expérience dont le nombre de répétition est supérieur à 2, le principe reste le même.

Exemple :

On lance un dé à six faces 4 fois de suite.
On considère les issues suivantes :
A : On obtient un nombre pair.
B : On obtient un 1.
C : On obtient un 3 ou un 5.

La probabilité d'obtenir la suite d'issues (A ; B ; A ; C) est égale à :
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{144} = \frac{1}{72}$