Fonction inverse

I) Définition et courbe représentative

1) Définition

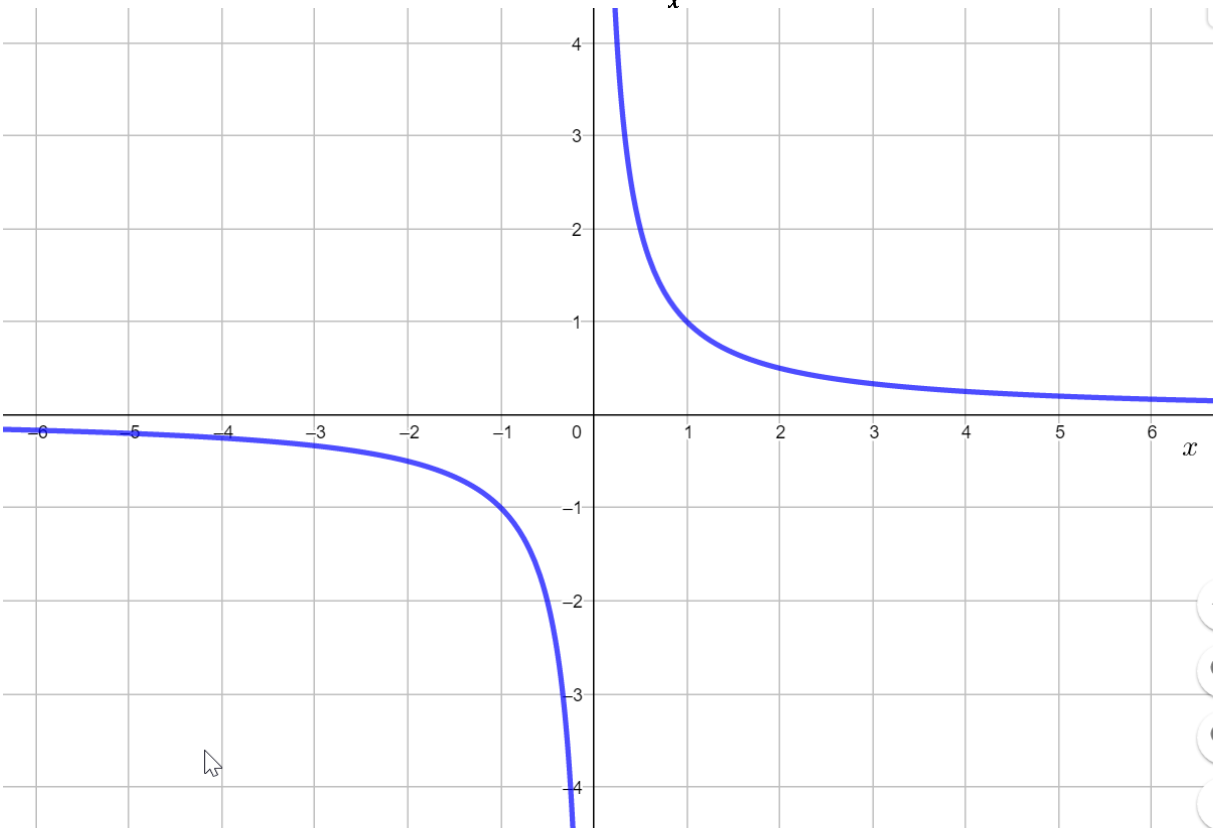
La fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

2) Représentation graphique

a. Tableau de valeur :

x	−4	−3	−2	−0,25	−1	0,25	1	2	3	4
$f(x)$	−0,25	$-\frac{1}{3}$	−0,5	−4	−1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$	0,25

b. Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$:



II) Dérivée et tableau de variation

1) Dérivée de la fonction inverse

Propriété :

La dérivée de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration : Déterminons le nombre dérivé de la fonction f en a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

Or: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{a(a+h)}\right) = -\frac{1}{a^2}$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\frac{1}{a^2}$.

En conclusion, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Exemples : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$f(x) = \frac{7}{x} = 7 \times \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 7 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-7}{x^2}$

$g(x) = \frac{-4}{x} = -4 \times \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad g'(x) = -4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$

$h(x) = \frac{7}{2x} = \frac{7}{2} \times \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad h'(x) = \frac{7}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-7}{2x^2}$

2) Sens de variation de la fonction inverse

Propriété :

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration :

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Comme $x^2 > 0$ alors $-\frac{1}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

Attention la fonction n'est pas définie en 0
donc on met une double barre

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-\frac{7}{x}$
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) En déduire les variations de f.

Correction :

1) f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0\,;+\infty[$ $f(x)=-7\times\frac{1}{x}$ donc $f'(x)=(-7)\times(-\frac{1}{x^2})=\frac{7}{x^2}$

$f'(x)=\frac{7}{x^2}$

2) $f'(x)=\frac{7}{x^2}$ donc $f'(x)>0$ sur $]-\infty;0[\cup]0\,;+\infty[$ donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;0[\cup]0\,;+\infty[$

III) Rappel des fonctions dérivées à connaitre

Fonction f :	***Dérivable sur*** :	***Fonction dérivée f'*** :
$f(x)=k\ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0\,;+\infty[$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=3x+\frac{2}{x}+1$

Calculer la fonction dérivée de f.

f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0\,;+\infty[$ et $f'(x)=3-\frac{2}{x^2}=\frac{3x^2-2}{x^2}$

IV) Comportement de la fonction inverse aux bornes de l'ensemble de définition : Limites et asymptotes

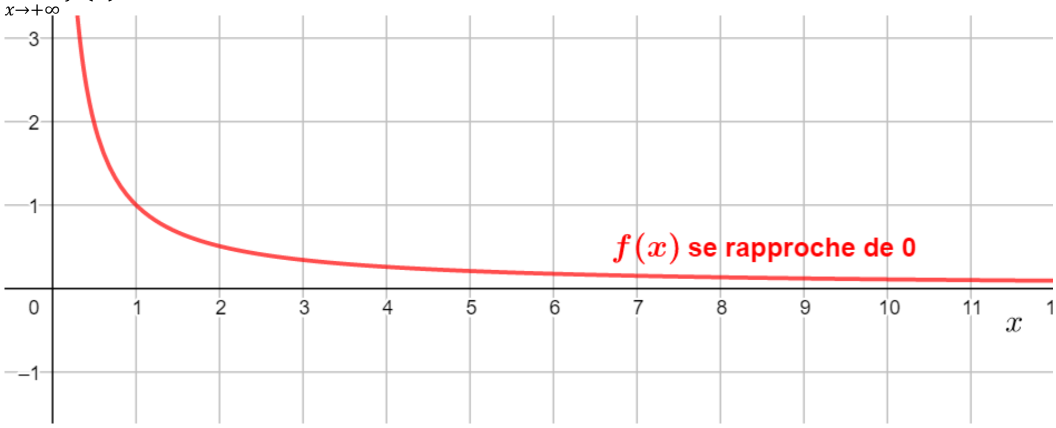
1) Comportement de la fonction inverse en $+\infty$

Avec la calculatrice on étudie les valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand.

x	10	100	1000	10 000	...
$f(x)$	0,1	0,01	0,001	0,0001	?

On remarque que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus grand.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0 et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.



Graphiquement, plus les valeurs de x sont grandes, plus la courbe représentative de f se rapproche de l'axe des abscisses.

Propriété :

• La limite de la fonction $\frac{1}{x}$ en $+\infty$ est 0, on le note :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

• Graphiquement plus les valeurs de x sont grandes plus la courbe représentative de la fonction $\frac{1}{x}$ se rapproche de l'axe des abscisses :

On dit que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction $\frac{1}{x}$ en $+\infty$.

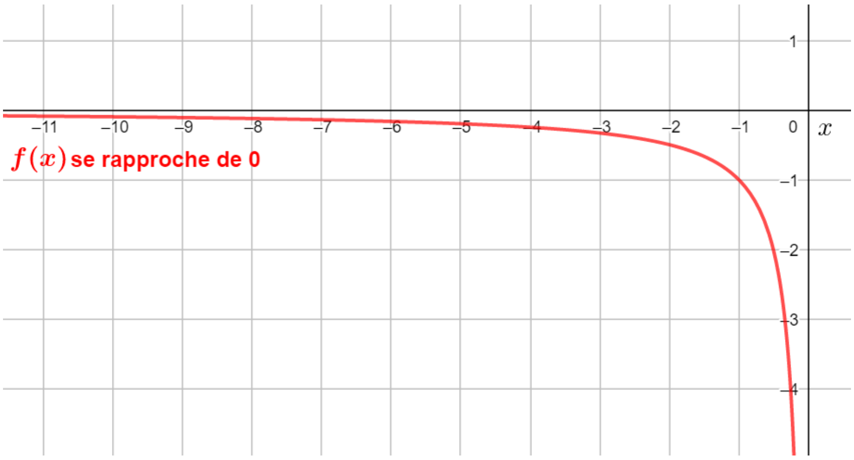
2) Comportement de la fonction inverse en $-\infty$

Avec la calculatrice on étudie les valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus petit c'est-à-dire lorsque x tend vers $-\infty$.

x	...	-10000	-1000	-100	-10
$f(x)$	?	$-0,0001$	$-0,001$	$-0,01$	$-0,1$

On remarque que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus petit c'est-à-dire lorsque x tend vers $-\infty$.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0 et on note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.



Graphiquement, plus les valeurs de x sont petites, plus la courbe représentative de f se rapproche de l'axe des abscisses.

Propriété :

• La limite de la fonction $\frac{1}{x}$ en $-\infty$ est 0, on le note :

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

• Graphiquement plus les valeurs de x sont petites plus la courbe représentative de la fonction $\frac{1}{x}$ se rapproche de l'axe des abscisses :

On dit que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction $\frac{1}{x}$ en $-\infty$.

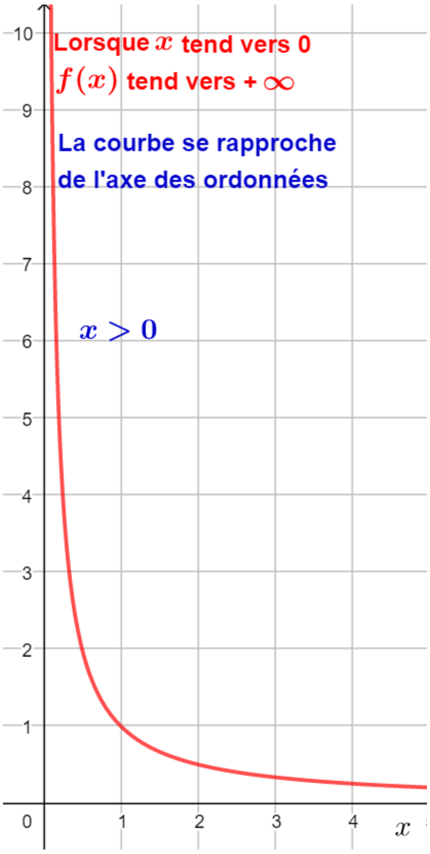
3) Comportement de la fonction inverse en 0

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas.Elle n'est pas définie en 0. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}000001$	…	$0{,}000001$	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$
$f(x)$	-10	-100	-1000	$-1\ 000\ 000$	?	$1\ 000\ 000$	1000	100	10

A l'aide de la calculatrice, on constate que le comportement est différent pour x positif ou négatif.

• **1^er^ cas :** x tend vers 0 mais x est **positif**

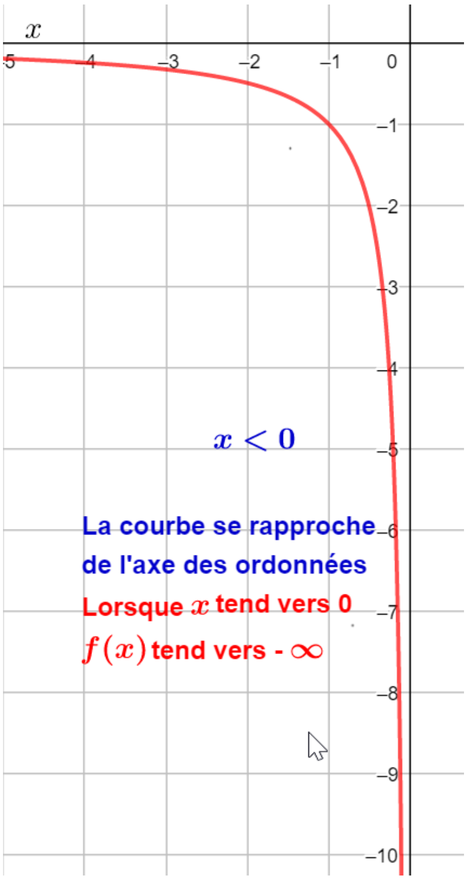


Lorsque $\boldsymbol{x > 0}$: $f(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x > 0$ est égale à $+\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

Graphiquement, pour des valeurs positives, de plus en plus en proches de 0, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.

• **2ème cas :** x tend vers 0 mais x est **négatif**



Lorsque $\boldsymbol{x < 0}$: $f(x)$ devient de plus en plus petit(vers $-\infty$) lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x < 0$ est égale à $-\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty.$$

Graphiquement, pour des valeurs négatives, de plus en plus en proches de 0, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.

Propriété :

• **La limite de la fonction $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0 x restant positif est $+\infty$ on le note :**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

• **La limite de la fonction $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0 x restant négatif est $-\infty$ on le note :**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

• **Graphiquement plus les valeurs de x tendent vers 0 plus la courbe représentative de la fonction $\frac{1}{x}$ se rapproche de l'axe des ordonnées (que les valeurs soient positives ou négatives) :**

On dit que l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de la fonction $\frac{1}{x}$ en 0.

V) Exemple d'étude de fonction avec la fonction inverse

1) Exemple 1

Soit la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{3x-4}{x}$

1. Calculer la fonction dérivée de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer les limites en 0
4. Déterminer les limite en $+\infty$ et en $-\infty$
5. Représenter la fonction f dans un repère.

Solution :

$f(x)=\frac{3x-4}{x}=\frac{3x}{x}-\frac{4}{x}=3-\frac{4}{x}$

1. f est dérivable sur $]0;5]$ et $f'(x)=0-\left(-\frac{4}{x^2}\right)=\frac{4}{x^2}$

2. $f'(x)=\frac{4}{x^2}$, comme $\frac{4}{x^2}>0$ sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ donc $f'(x)>0$ sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$. Donc f est donc croissante sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty 0$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ $\Vert$	$\nearrow$

3. $f(x) = \frac{3x-4}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{4}{x} = 3 - \frac{4}{x}$

Si x tend vers 0 avec $x > 0$ on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} -\frac{4}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 3 - \frac{4}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$

Si x tend vers 0 avec $x < 0$ on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} -\frac{4}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} 3 - \frac{4}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$

4. $f(x) = \frac{3x-4}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{4}{x} = 3 - \frac{4}{x}$

En $+\infty$: $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} 3 - \frac{4}{x} = 3 - 0 = 3$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 3$

En $-\infty$: $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} 3 - \frac{4}{x} = 3 - 0 = 3$ donc $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = 3$

5. Le tableau de variation complet :

x	$-\infty 0$		$+\infty$		
$f(x)$	$3 -\infty$ ↗	$+\infty$	‖	↗	3

La courbe représentative est :

2) Exemple 2

Soit la fonction f définie sur $]0;5]$ par $f(x) = 3 - 5x + \frac{7}{x}$

1. Calculer la fonction dérivée de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer la limite en 0
4. Représenter la fonction f dans un repère.

Solution :

1. $f(x) = 3 - 5x + \frac{7}{x}$ f est dérivable sur $]0;5]$ et $f'(x) = 0 - 5 \times 1 - \frac{7}{x^2}$

$f'(x) = -5 - \frac{7}{x^2}$

2. $f'(x) = -5 - \frac{7}{x^2}$ comme $x^2 > 0$ alors $\frac{7}{x^2} > 0$ donc $-\frac{7}{x^2} < 0$ donc $-5 - \frac{7}{x^2} < 0$

$f'(x) < 0$ sur $]0;5]$ donc f est décroissante sur $]0;5]$.

x	0		5
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$-20{,}6$

$f(5) = 3 - 5 \times 5 + \frac{7}{5} = 3 - 25 + \frac{7}{5} = -22 + \frac{7}{5} = -20{,}6$

3. Comme l'intervalle est $]0;5]$, on fait la limite lorsque x tend vers 0 avec $x > 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{7}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 3 - 5x + \frac{7}{x} = 3 - 0 + \infty = +\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

4. La courbe représentative de f sur $]0;5]$ est :