Fonction logarithme décimal

I) Fonction exponentielle de base 10

1) Définition et propriété

• **La fonction exponentielle de base 10 est définie sur** $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10^x$.

• **Cette fonction est strictement positive sur** $\mathbb{R}$.

• **Cette fonction est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$

• **Pout tous nombres réels** a, b **:**

$10^a \times 10^b = 10^{a+b}$

$\frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$

• **Cas particulier :**

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

Exemple :

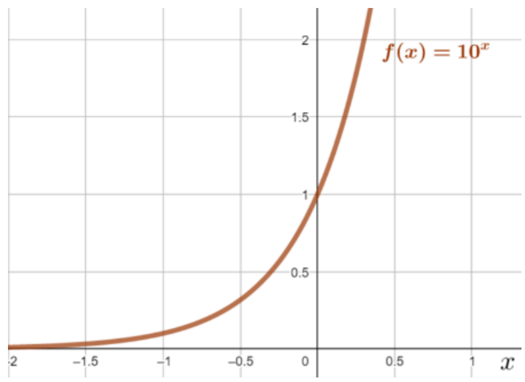
$$\frac{10^5 \times 10^7}{(10^3)^2} = \frac{10^{5+7}}{10^{3\times 2}} = \frac{10^{12}}{10^6} = 10^{12-6} = 10^6$$

2) Tableau de variation et courbe représentative

La tableau de variation est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

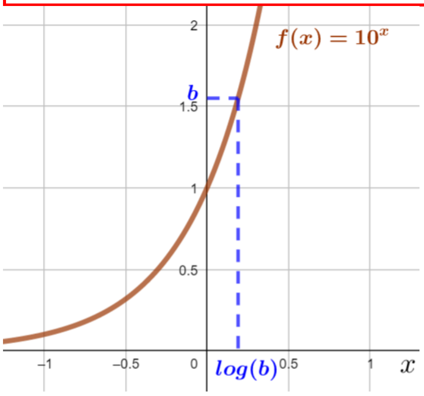
La représentation graphique est :



II) Définition et étude du logarithme décimal

1) Définition 1

L'équation $10^x = b$, avec $b > 0$, admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Cette solution se note $\log(b)$.



2) Définition 2

On appelle logarithme décimal d'un réel strictement positif b, l'unique solution de l'équation $10^x = b$. On la note $\log(b)$.

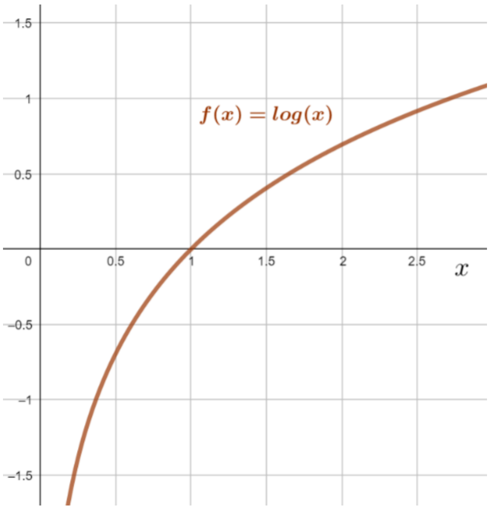
La fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction :

$$x \longmapsto \log(x)$$

3) Sens de variation

La fonction logarithme décimal $x \longmapsto \log(x)$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

4) Représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \log(x)$



5) Valeurs particulières du logarithme décimal

$\boldsymbol{log(1) = 0}$
$\boldsymbol{log\ 10 = 1\ et}$
$\boldsymbol{log(\frac{1}{10}) = -1}$

Explications :

$10^0 = 1$ donc $0 = \log(1)$

$10^1 = 10$ donc $1 = \log(10)$

$10^{-1} = \dfrac{1}{10}$ donc $-1 = \log(\frac{1}{10})$

6) Propriétés

- **Si $x \geq 1$, $\log(x) \geq 0$**
- **Si $0 < x \leq 1$, $\log(x) \leq 0$**
- **Pour $b > 0$: $10^x = b$ revient à écrire $x = \log(b)$**
- **$\log(10^x) = x$**
- **Pour $x > 0$: $10^{\log(x)} = x$**

Exemples :

1. $\log(1{,}5) \geq 0$ car $1{,}5 \geq 1$

2. $\log(0{,}9) \leq 0$ car $0 < 0{,}9 \leq 1$

3. $10^7 = 10\,000\,000$ si et seulement si $7 = \log(10\,000\,000)$

4. $\log(10^8) = 8$

5. $\log(10\,000) = \log(10^4) = 4$

6. $\log(0{,}001) = \log(10^{-3}) = -3$

7. $10^{\log(9)} = 9$

III) Propriétés algébriques du logarithme décimal

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

- $\boldsymbol{\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)}$
- $\boldsymbol{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$
- $\boldsymbol{\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)}$
- **Pour n entier naturel : $\log(a^n) = n\log(a)$**

Exemples :

Exemple 1 : Simplifier les expressions suivantes :

$A = \log(3-\sqrt{5}) + \log(3+\sqrt{5})$ $\qquad B = 3\log(2) + \log(5) - 5\log(2)$

$C = \log(10^5) + \log\left(\frac{1}{10}\right)$

Réponse :

$A = \log(3-\sqrt{5}) + \log(3+\sqrt{5})$ Or $log(a) + log(b) = log(a\times b)$ donc

$A = \log((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}))$ *On reconnait l'identité remarquable* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ *donc*

$A = \log\left(3^2 - \sqrt{5}^2\right) = \log(9-5) = \log(4)$

$A = \log(4)$

$B = 3\log(2) + \log(5) - 5\log(2)$ Or $n\log(a) = \log(a^n)$ donc

$B = \log(2^3) + \log(5) - \log(2^5)$

$B = \log(8) + \log(5) - \log(32)$ Or $log(a) + log(b) = log(a\times b)$ donc

$B = \log(8\times 5) - \log(32)$ Or $log(a) - log(b) = log(\frac{a}{b})$ donc

$B = \log\left(\frac{40}{32}\right) = \log(\frac{5}{4})$

$B = \log(\frac{5}{4})$

$C = \log(10^5) + \log\left(\frac{1}{10}\right)$ Or $log(10^n) = n$ donc $log(10^5) = 5$

$C = 5 + \log\left(\frac{1}{10}\right)$ Or $\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$ donc

$C = 5 - \log(10)$ Or $log(10^n) = n$ donc $log(10) = log(10^1) = 1$

$C = 5 - 10 = -5$

Exemple 2 :

On donne : $\log(a) = 5$.
Calculer $\log(a^2)$, $\log(a^4)$ et $\log(100a)$.

Réponse :

- $\log(a^2) = 2\log(a)$ avec $\log(a) = 5$ donc
  $\log(a^2) = 2\times 5 = 10$

- $\log(a^4) = 4\log(a)$ avec $\log(a) = 5$ donc
  $\log(a^4) = 4\times 5 = 20$

- $\log(100a)$ Or $log(a\times b) = log(a) + log(b)$ et $\log(a) = 5$ donc
  $\log(100a) = \log(100) + \log(a) = \log(10^2) + \log(a) = 2 + 5 = 7$ donc
  $\log(100a) = 7$

IV) Résolution d'équations à l'aide du logarithme décimal

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$\log(a) = \log(b)$ si **et seulement si** à $a = b$

Exemples :

Exemple 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5^x = 3$

Réponse : $5^x = 3$ si et seulement si $\log(5^x) = \log(3)$ *(on utilise la propriété a=b si et seulement si : log a=logb)* Or $\log(a^n) = n\log(a)$ donc

$x\log(5) = \log(3)$ donc $x = \frac{\log(3)}{\log(5)}$ donc $S = \{\frac{\log(3)}{\log(5)}\}$

Exemple 2 : Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'équation : $x^7 = 3$

Réponse : $x^7 = 3$ si et seulement si $\log(x^7) = \log(3)$ *(on utilise la propriété a=b si et seulement si : log a=logb)* Or $\log(a^n) = n\log(a)$ donc

$7\log(x) = \log(3)$ donc $\log(x) = \frac{\log(3)}{7}$ Or $n\log(a) = \log(a^n)$ donc

$\log(x) = \log(3^{\frac{1}{7}})$ si et seulement si $x = 3^{\frac{1}{7}}$ donc $S = \{3^{\frac{1}{7}}\}$

De façon plus générale, pour $x > 0$: $x^n = a$ a pour solution $x = a^{\frac{1}{n}}$

V) Résolution d'inéquations à l'aide du logarithme décimal

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$\log(a) > \log(b)$ **si et seulement si** à $a > b$

$\log(a) < \log(b)$ **si et seulement si** à $a > b$

$\log(a) \geq \log(b)$ **si et seulement si** à $a \geq b$

$\log(a) \leq \log(b)$ **si et seulement si** à $a \leq b$

Exemples :

Exemple 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5^x < 3$

Réponse : $5^x < 3$ si et seulement si $\log(5^x) < \log(3)$ *(on utilise la propriété a<b si et seulement si : log a<logb)* Or $\log(a^n) = n\log(a)$ donc

$x\log(5) < \log(3)$ donc $x < \frac{\log(3)}{\log(5)}$ *(log(5)>0 donc le sens ne change pas lorsqu'on divise par log(5))*

donc $S =]-\infty; \frac{\log(3)}{\log(5)}[$

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $0{,}5^x \leq 2$

Réponse : $0{,}5^x \leq 2$ si et seulement si $\log(0{,}5^x) \leq \log(2)$ *(on utilise la propriété a≤b si et seulement si : log a≤logb)* Or $\log(a^n) = n\log(a)$ donc

$x\log(0{,}5) \leq \log(2)$ donc $x \geq \frac{\log(2)}{\log(0{,}5)}$ *(log(0,5)<0 donc le sens change lorsqu'on divise par log(0,5))*

donc $S = [\frac{\log(2)}{\log(0{,}5)}; +\infty[$

Exemple 3: Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation : $x^7 \geq 3$

Réponse : $x^7 \geq 3$ si et seulement si $\log(x^7) \geq \log(3)$ *(on utilise la propriété a≥b si et seulement si : log a≥logb)* Or $\log(a^n) = n\log(a)$ donc

$7\log(x) \geq \log(3)$ donc $\log(x) \geq \frac{\log(3)}{7}$ *Or* $n\,log(a) = log(a^n)$ *donc*

$\log(x) \geq \log(3^{\frac{1}{7}})$ si et seulement si $x \geq 3^{\frac{1}{7}}$ donc $S = [\,3^{\frac{1}{7}}\,;\,+\infty\,[$

VI) Taux d'évolution moyen

1) Propriété : Nous avons vu précédemment pour $x > 0$:

$x^n = a$ **si et seulement si** $x = a^{\frac{1}{n}}$

De même :

$x^n > a$ **si et seulement si** $x > a^{\frac{1}{n}}$

2) Lien avec le taux d'évolution moyen

Exemple : Entre 2020 et 2024, le prix de l'électricité a augmenté de 59 %. Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

Soit t le taux d'évolution annuel.
Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur un an** est égal à : $1 + \frac{t}{100}$
Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur quatre ans** (de 2020 à 2024) est égal à :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)=\left(1+\frac{t}{100}\right)^4$$

Or, sur quatre années, le prix a augmenté de 59 % donc ce coefficient multiplicateur est également égal à : $1{,}59$.
On a donc :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^4 = 1{,}59$$
$$1+\frac{t}{100} = 1{,}59^{\frac{1}{4}}$$
$$\frac{t}{100} = 1{,}59^{\frac{1}{4}} - 1$$
$$t = 100\times\left(1{,}59^{\frac{1}{4}} - 1\right)$$
$$t \approx 12{,}29\ \%$$

Le taux d'évolution moyen annuel est environ égal $12{,}29\ \%$.