Fonctions exponentielles

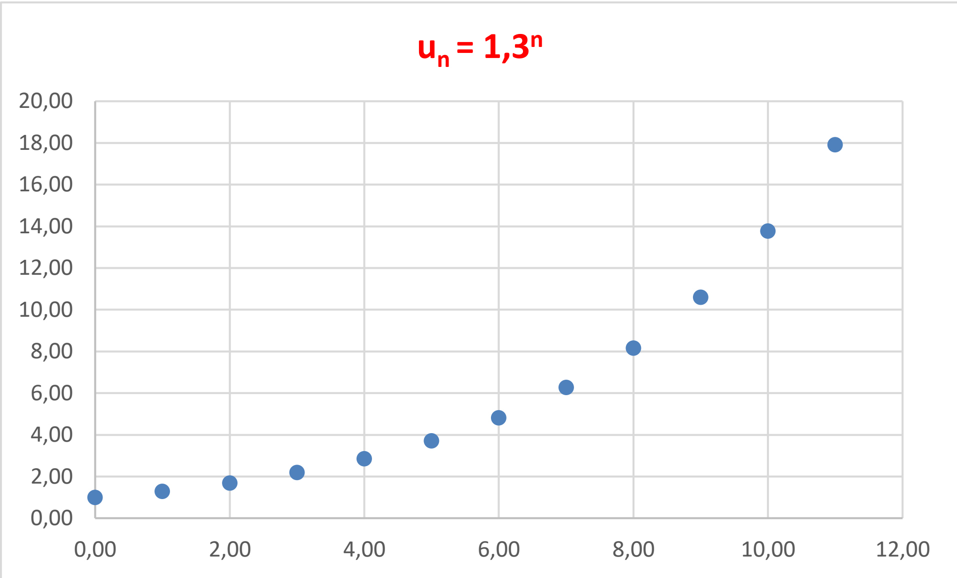
I) Définition des fonctions exponentielles

1) Des suites géométriques aux fonctions exponentielles de base a

a) Exemple

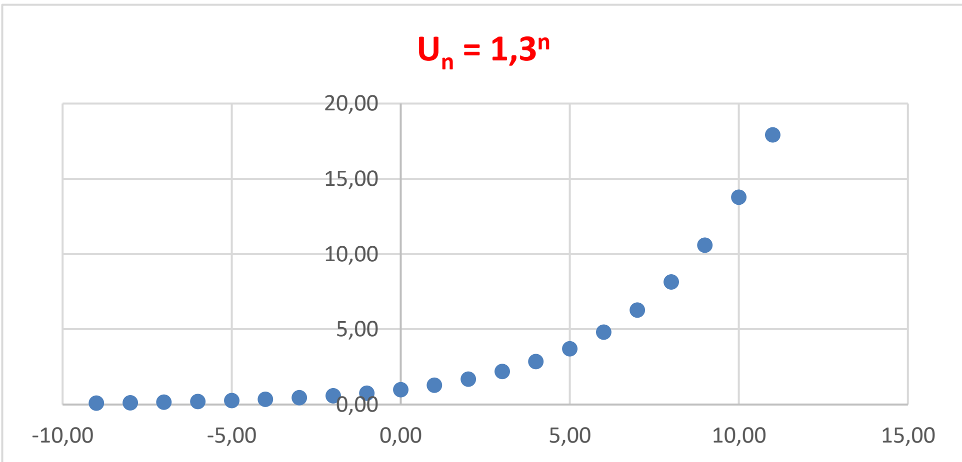
Soit (U_n) la suite géométrique $U_n = 1{,}3^n$ (voir chapitre précédent suite géométrique)
Nous avons représenté ci-dessous, à l'aide d'un tableur, le nuage de points de cette suite :

x	$1{,}3^x$
0	1
1	1,3
2	1,69
3	2,197
4	2,8561
5	3,71293
6	4,826809
7	6,2748517
8	8,15730721
9	10,6044994
10	13,7858492
11	17,9216039

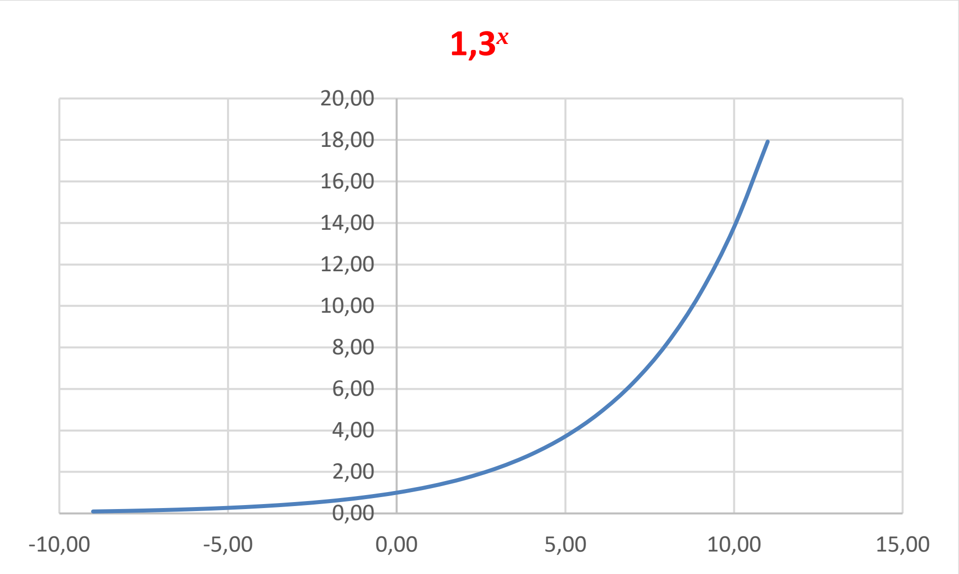


Par extension, sachant que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (chapitre puissance) on peut donc calculer les valeurs de $1{,}3^n$ pour des valeurs de n négatives ce qui donne :

x	$1{,}3^x$
-9,00	0,09
-8,00	0,12
-7,00	0,16
-6,00	0,21
-5,00	0,27
-4,00	0,35
-3,00	0,46
-2,00	0,59
-1,00	0,77
0,00	1,00
1,00	1,30
2,00	1,69
3,00	2,20
4,00	2,86
5,00	3,71
6,00	4,83
7,00	6,27
8,00	8,16
9,00	10,60
10,00	13,79
11,00	17,92



Si on relie tous ces points par une ligne continue, parfaitement lisse sans lever le crayon, on obtient la courbe d'une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}$:



C'est ainsi que l'on définit une nouvelle fonction appelée fonction exponentielle de base $1{,}3$ qui est le prolongement de la suite géométrique (U_n) telle que $U_n = 1{,}3^n$. Dans notre cas on la notera : $f(x) = 1{,}3^x \quad x \in \mathbb{R}$

2) Définition des fonctions exponentielles

Soit a un nombre réel strictement positif donné.

La suite de terme général $u_n = a^n$, pour tout entier naturel n est une suite géométrique de raison a (voir le chapitre qui s'intitule suite géométrique).

La fonction exponentielle de base a est le prolongement de cette suite géométrique. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$ avec $a > 0$.

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$
$u_n = 3^n$ et $u_2 = 3^2 = 9$

La fonction exponentielle correspondante est $f(x) = 3^x$

$f(2) = 3^2 = 9$; $f(2{,}5) = 3^{2{,}5} \approx 15{,}59$ et $f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

Exemple 2 : La fonction exponentielle de base $2{,}5$ est $f(x) = 2{,}5^x$. Voici un tableau de valeurs de cette fonction :

x	f(x)
0	1
1	2.5
2	6.25
3	15.625
4	39.0625
5	97.65625
6	244.140625

3) Propriété

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$) est strictement positive sur $\mathbb{R}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$

II) Propriétés algébriques

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et x et y deux nombres réels :

$a^x \times a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{x \times y}$

$a^x \times b^x = (a \times b)^x$

$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$

$\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$

Exemples : Simplifier les expressions suivantes :

Simplifier les expressions suivantes :

$A = 5^{-3} \times 5^{-4}$ $\qquad B = \frac{2^3 \times 2^{-2,5}}{8^5}$ $\qquad C = (5,6^{-2,1})^3 \times 5,6^{5,2}$

Correction

$A = 5^{-3} \times 5^{-4}$

$A = 5^{-3+(-4)}$

$A = 5^{-7}$

$B = \frac{2^3 \times 2^{-2,5}}{8^5}$

$B = \frac{2^3 \times 2^{-2,5}}{(2^3)^5}$

$B = \frac{2^{3-2,5}}{2^{3\times 5}}$

$B = \frac{2^{0,5}}{2^{15}}$

$B = 2^{0,5-15}$

$B = 2^{-14,5}$

$B = \frac{1}{2^{14,5}}$

$C = (5,6^{-2,1})^3 \times 5,6^{5,2}$

$C = 5,6^{-2,1\times 3} \times 5,6^{5,2}$

$C = 5,6^{-6,3} \times 5,6^{5,2}$

$C = 5,6^{-6,3+5,2}$

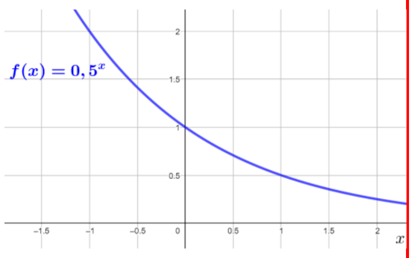
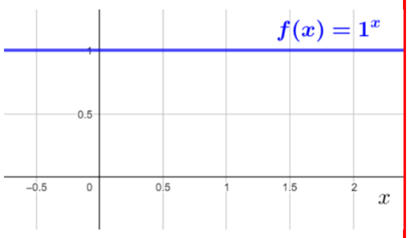
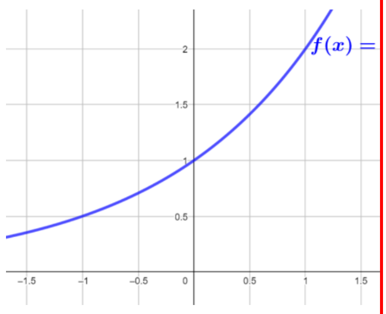
$C = 5,6^{-1,1}$

$C = \frac{1}{5,6^{1,1}}$

III) Variations des fonctions exponentielles

On déduit des variations des fonctions exponentielles de base a de celles des suites géométriques. D'où la propriété :

Soit a un nombre réel strictement positif /

$a \in]0;1[$	$a = 1$	$a > 1$
$x \longmapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.	**$x \longmapsto a^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.**	**$x \longmapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.**
		

Remarques :

- On retrouve les résultats établis pour la variation des suites géométriques.

- Si $a = 1$ alors la fonction exponentielle est constante. En effet, dans ce cas, $a^x = 1^x = 1$

- Quel que soit le nombre a, la fonction exponentielle passe par le point (0 ; 1). En effet, $a^0 = 1$.

Exemples : Étude des variations de fonction exponentielle

Exemple :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 0{,}7^x$
Étudier les variations de f

Correction :

f est de la forme $f(x) = a^x$ avec $0 < a < 1$, donc f est décroissante.
On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = 0{,}7^x$ et $g(x) = -2 \times 5^x$

IV) variation des fonctions $x \longmapsto ka^x$

a est un nombre réel strictement positif :

$a \in]0;1[$	$a > 1$
$x \longmapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.	**$x \longmapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.**
Si k>0 alors $x \longmapsto ka^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.	**Si k>0 alors $x \longmapsto ka^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.**
Si k<0 alors $x \longmapsto ka^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.	**Si k<0 alors $x \longmapsto ka^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.**

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$.par $x \longmapsto -3 \times 0{,}5^x$

Étudier les variations de f.

Correction :

$a = 0{,}5$, $0 < a < 1$ donc la fonction $x \longmapsto 0{,}5^x$ est décroissante

Or $k = -3$ donc $k < 0$ donc la fonction $x \longmapsto -3 \times 0{,}5^x$ est croissante

Exemple 2 : On considère la fonction g définie par : $g(x) = -4 \times 7^x$

Étudier les variations de g.

Correction :

$a = 7$, $a > 1$ donc la fonction $x \longmapsto 7^x$ est croissante

Or $k = -4$ donc $k < 0$ donc la fonction $g(x) = -4 \times 7^x$ est décroissante