Suites arithmétiques

I) Définition (relation de récurrence) :

Soit n_0 un nombre un entier naturel

Soit (u_n) une suite. On dit qu'elle est arithmétique lorsque chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre réel r constant appelé raison.

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Cette formule s'appelle formule de récurrence.

Exemple 1 : Pour un abonnement internet illimité, un opérateur propose les prix suivants : 40 € de frais d'établissement de ligne et 30 € par mois d'abonnement.

• Le budget total pour un mois d'abonnement est : 40 + 30 = 70
Le budget total pour un mois d'abonnement est de 70 €

• Le budget total pour deux mois d'abonnement est: 70 + 30 = 100
Le budget total pour deux mois d'abonnement est 100 €

• Le budget total pour trois mois d'abonnement est: 100 + 30 = 130
Le budget total pour un trois d'abonnement est de 130 €

Et ainsi de suite … On additionne 30 au prix du budget total du mois précédent pour obtenir celui du mois suivant

Soit u_1 le budget total pour un mois d'abonnement : u_1 = 70

u_2 est le budget total pour deux mois d'abonnement: u_2 = u_1 **+ 30** = 70 + 30 = 100

u_3 est le budget total pour trois mois d'abonnement: u_3 = u_2 **+ 30** = 100 + 30 = 130

Soit u_n le budget total pour n mois d'abonnement : u_n = u_{n-1} **+ 30**

Cette suite est arithmétique : On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours par le même nombre (dans notre cas 30) , 30 est la raison de cette suite arithmétique.

Exemple 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

2. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3

Réponse :

1. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, u_{n+1} = u_n+ 3 avec $u_0 = 1$

2. u_1 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4 **u_1 = 4**
u_2 = u_1 + 3 = 4 + 3 = 7 **u_2 = 7**
u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10 **u_3 = 10**

Exemple 3 : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 5$ et de raison -2.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

2. Calculer u_2 ; u_3 ; u_4

Réponse :

1. u_{n+1} = u_n - 2 avec u_1 = 5

2. u_2 = u_1 - 2 = 5 - 2 = 3 $\quad$ $\boldsymbol{u_2}$ **= 3**
u_3 = u_2 - 2 = 3 - 2 = 1 $\quad$ $\boldsymbol{u_3}$ **= 1**
u_4 = u_3 - 2 = 1 - 2 = -1 $\quad$ $\boldsymbol{u_4}$ **= -1**

Exemple 4 : Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5n + 4$.

1.Calculer u_0 ; u_1 ; u_2

2. Montrer que cette suite est arithmétique, préciser le premier terme et la raison.

Réponse :

1. $u_0 = 5 \times 0 + 4 = 4$

$u_1 = 5 \times 1 + 4 = 9$

$u_2 = 5 \times 2 + 4 = 14$

La suite semble arithmétique de raison 5. Nous allons le montrer :

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5(n+1) + 4 = 5n + 5 + 4 = 5n + 9$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5n + 9 - (5n + 4) = 5n + 9 - 5n - 4 = 5$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 4$

II) Forme explicite

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ et $n \geq p$, un entier naturel.

On peut obtenir directement la valeur de u_n en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Cas particulier où le 1er rang est 0 :

$$u_n = u_0 + nr$$

Cette formule s'appelle forme explicite.

Remarques :

La **formule de récurrence** est incommode dans le cas où il s'agit de calculer un terme de rang élevé.

Par exemple, pour calculer u_{28} à partir de u_0, il faut effectuer 28 additions du nombre r .

C'est inefficace !

Il convient dans ce cas d'employer la seconde formule, appelée **formule explicite.**

Les deux formules sont équivalentes : toute suite qui, pour tout entier n, vérifie l'une des formules vérifie l'autre.

Exemples :

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$

1) Justifier que cette suite est arithmétique

2) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 puis u_{23}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3$. La suite est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme 1 (Pour passer d'un terme au suivant on ajoute à chaque fois 3).

2) $u_1 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$ — $u_1 = 4$
$u_2 = u_1 + 3 = 4 + 3 = 7$ — $u_2 = 7$
$u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10$ — $u_3 = 10$

On applique la 2ème formule :

$u_{23} = u_0 + 23 \times 3$
$u_{23} = 1 + 23 \times 3 = 70$ — $u_{23} = 70$

3) $u_n = U_0 + n \times 3$ — $u_n = 1 + 3n$

III) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété :

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r

- **Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.**
- **Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.**
- **Si $r = 0$, alors (u_n) est constante.**

Exemple 1 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par : $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$

Réponse :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 3$

(u_n) est une suite arithmétique de raison 3 >0

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Exemple 2 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :$u_{n+1} = u_n - 2$ et $u_1 = 5$

Réponse :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - 2$

(u_n) est une suite arithmétique de raison - 2 <0

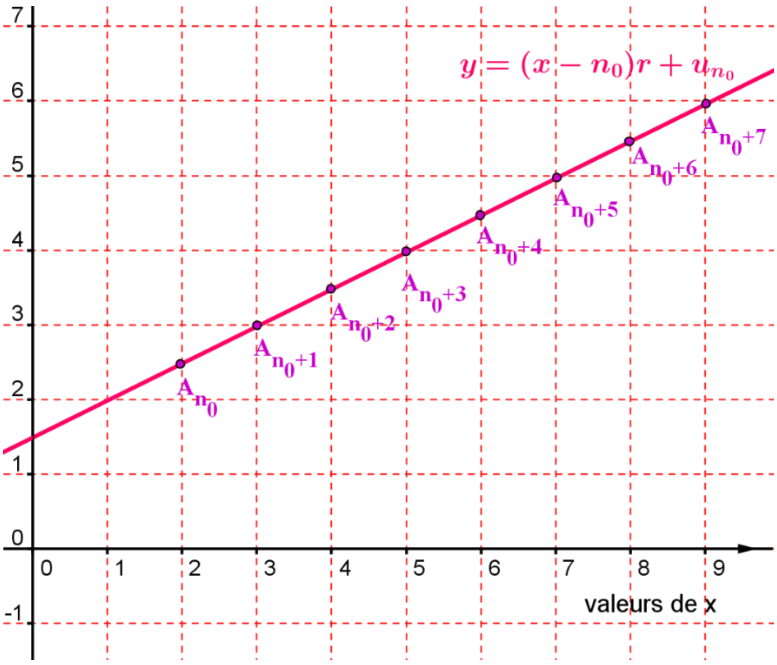
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante

IV) Représentation graphique

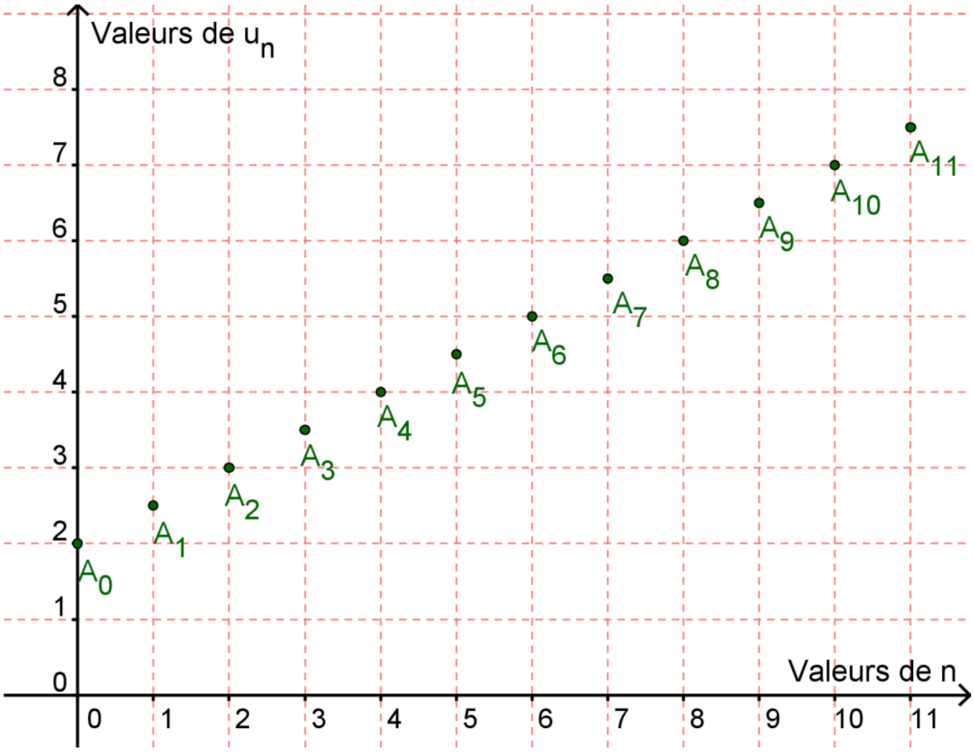
La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de points alignés, et cela la caractérise.

Si les points de la représentation graphique d'une suite sont alignés, alors c'est une suite arithmétique.

De plus, le coefficient directeur de la droite sur laquelle les points sont alignés est la raison de la suite arithmétique.



Exemple : Voici la représentation graphique de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 0,5



V) Moyenne arithmétique de deux nombres

1. Définition

La moyenne arithmétique de deux nombres réels a et b est le nombre $\frac{a+b}{2}$

Exemple :

Calculer la moyenne arithmétique des nombres −7 et 15.

$$m = \frac{-7+15}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

4 est la moyenne arithmétique des nombres −7 et 15.

2) Propriété

Si (u_n) est une suite arithmétique alors la moyenne arithmétique de u_{n-1} et de u_{n+1} est u_n

$$\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} = u_n$$

Démonstration :

Soit u_n le terme d'une suite arithmétique de raison r, on a u_{n+1} le terme suivant est $u_{n+1} = u_n + r$, où r est la raison de la suite.
On a également : $u_n = u_{n-1} + r$ donc $u_{n-1} = u_n - r$

La moyenne arithmétique du terme qui précède u_n et du terme qui le suit est égale à :
$m = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2} = \frac{u_n - r + u_n + r}{2} = \frac{2u_n}{2} = u_n$

Donc u_n est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique $u_0 = 3$ et $u_2 = 19$. Quelle est la raison de la suite ?

$\frac{u_0+u_2}{2} = u_1$ en remplaçant on obtient : $\frac{3+19}{2} = u_1$donc $u_1 = 11$

$r = u_1 - u_0 = 11 - 3 = 8$ La raison de la suite est donc 8.

6) Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r alors :

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} .... + u_n = \sum_{i=p}^{n} u_i = \textit{nombre de terme} \times \frac{\textit{premier terme} + \textit{dernier terme}}{2}$$

Cas particulier :

$$u_0 + u_1 + u_2 .... + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = (n+1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

$$u_1 + u_2 .... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = n \times \left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right)$$

Exemple 1 : Soit $u_n = 7n - 1$

Calculer $u_1 + u_2 .... + u_{10}$

$u_{n+1} - u_n = 7(n+1) - 1 - 7n + 1 = 7n + 7 - 1 - 7n + 1 = 7$

(u_n) est une suite arithmétique de raison 7 et le premier terme est 6.

$u_1 + u_2 .... + u_{10} = 10 \times (\frac{u_1 + u_{10}}{2}) = 10 \times (\frac{6 + 69}{2}) = 10 \times (\frac{75}{2}) = 375$

Exemple 2 : u_n est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 3$

Calculer $u_0 + u_1 .... + u_{10}$

$u_0 = 3$ et $u_{10} = u_0 + 10r = 3 + 10 \times (-2) = 3 - 20 = -17$

$u_0 + u_1 .... + u_{10} = 11 \times (\frac{u_0 + u_{10}}{2}) = 11 \times (\frac{3-17}{2}) = 11 \times (-7) = -77$