Suites géométriques

I) Définition

Soit (u_n) une suite. On dit qu'elle est géométrique lorsque chaque terme s'obtient en multipliant au précédent un même nombre réel q constant appelé raison.

$$u_{n+1} = qu_n$$

Cette formule s'appelle formule de récurrence.

Exemple 1: Une voiture, achetée neuve qui coûtait 20 000 € en 2008, perd chaque année 20% de sa valeur.

• Au bout d'un an : la voiture coûtait 20% moins cher :

20 000 × (1 - $\frac{20}{100}$) = 20 000 × **0,8** = 16 000. En 2009 la voiture coûtera 16 000 €.

• Au bout de deux ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur :

16 000 × (1 - $\frac{20}{100}$) = 16 000 × **0,8** = 12 800. En 2010 la voiture coûtait 12 800 €.

• Au bout de trois ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur :

12 800 × (1 - $\frac{20}{100}$) = 12 800 × **0,8** = 10 240. En 2011 la voiture coûtait 10 240.€.

Et ainsi de suite … on multiplie la valeur de la voiture de l'année précédente par 0,8 pour obtenir celle de l'année suivante.

Soit u_0 la valeur de la voiture en 2008. u_0 = 20 000

u_1 est la valeur de la voiture au bout d'un an c'est-à-dire u_1 = u_0 × **0,8** = 16 000

u_2 est la valeur de la voiture au bout de deux ans c'est-à-dire u_2 = u_1 × **0,8** = 12 800

Soit u_n la valeur de la voiture au bout de n années, u_n = u_{n-1} × **0,8**

Cette suite est géométrique : On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours pas le même nombre (dans notre cas 0,8)

Et pour tout n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = 0,8u_n}$

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 2

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

2. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3

Réponse :

1. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, u_{n+1}= $3u_n$ et u_0 = 2

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par 3

2) u_1 = u_0 × 3 = 2 × 3 = 6 $\quad$ $\boldsymbol{u_1}$ **= 6**

u_2 = u_1 × 3 = 6 × 3 = 18 $\quad$ $\boldsymbol{u_2}$**= 18**

u_3 = u_2 × 3 = 18 × 3 = 54 $\quad$ $\boldsymbol{u_3}$ **= 54**

II) Forme explicite d’une suite géométrique

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q

Soit $(u_n)_{n\geq p}$, une suite, et n un entier naturel supérieur ou égal à p ,

On peut obtenir directement la valeur de u_n à partir de celle de u_p en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_p \times q^{(n-p)}$$

Cas particulier où le 1er rang est 0 : $u_n = u_0 \times q^n$

Cette formule est appelée forme explicite de la suite

Remarques :

La **formule de récurrence** est incommode dans le cas où il s’agit de calculer un terme de rang élevé.

Par exemple, pour calculer u_{28} à partir de u_0, il faut effectuer 28 multiplications par le nombre q .

C’est inefficace !

Il convient dans ce cas d’employer la seconde formule, appelée **formule directe.**

Les deux formules sont équivalentes : toute suite qui, pour tout entier n, vérifie l’une des formules vérifie l’autre.

Exemples :

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_1; u_2 ; u_3 puis u_{15}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$. On passe d’un terme au suivant en multipliant toujours par 3, la suite est donc géométrique de raison 3 et de premier terme 2.

2) $u_1 = u_0 \times 3 = 2 \times 3 = 6$ $\qquad u_1 = 6$

$u_2 = u_1 \times 3 = 6 \times 3 = 18$ $\qquad u_2 = 18$

$u_3 = u_2 \times 3 = 18 \times 3 = 54$ $\qquad u_3 = 54$

On applique la 2ème formule :

$u_{15} = u_0 \times 3^{15}$

u_{15} = 2 × 3^{15} u_{15} = 28 697 814

3) u_n = u_0× 3^n u_n = 2 × 3^n

Exemple 2 : Soit la suite (u_n) définie par :

$\boldsymbol{u_{n+1}} = \frac{u_n}{2}$ et u_1 = 3

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par $\frac{1}{2}$ .La suite est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 3.

2) $u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{3}{2}$ = 1,5 u_2 = 1,5

$u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{1,5}{2}$ = 0,75 u_3 = 0,75

$u_4 = \frac{u_3}{2} = \frac{0,75}{2}$ = 0,75 u_4 = 0,375

On applique la 2ème formule :

$u_{30} = u_1 \times (\frac{1}{2})^{30-1}$

le 1er terme de la suite est u_1 au lieu de u_0
La suite a donc un terme de moins donc
la formule est $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

$u_{30} = 3 \times (\frac{1}{2})^{29}$ $u_{30} = \frac{3}{2^{29}}$

3) $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$ $u_n = \frac{3}{2^{n-1}}$

Exemple 3 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n}$

1.Montrer que pour tout entier n, $u_n = 5 \times (\frac{5}{4})^n$

2.Montrer que u est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0

Réponse :

1. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n} = \frac{5 \times 5^n}{4^n} = 5 \times \frac{5^n}{4^n} = 5 \times (\frac{5}{4})^n$

2.Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 \times (\frac{5}{4})^{n+1} = 5 \times (\frac{5}{4})^n \times \frac{5}{4} = u_n \times \frac{5}{4}$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{5}{4}$. $u_0 = \frac{5^1}{4^0} = \frac{5}{1}$

Son premier terme est $u_0 = 5$

III) Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété :

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q ($q > 0$) et de 1er terme strictement positif.

$0 < q < 1$	$q > 1$	$q = 1$
(u_n) est strictement décroissante.	**(u_n) est strictement croissante.**	**(u_n) est constante.**

Exemple 1 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $3 > 1$

La suite (u_n) est donc croissante.

Exemple 2 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$ et $u_0 = 2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0 < \frac{1}{2} < 1$ avec $u_0 > 0$

La suite (u_n) est donc décroissante.

IV) Moyenne géométrique de deux nombres

1) Définition

La moyenne géométrique de deux nombres réels a et b est le nombre :

$$\sqrt{ab}$$

Exemple : Calculer la moyenne géométrique des nombres 20 et 45.

Solution :
$m = \sqrt{20 \times 45} = \sqrt{900} = 30$. La moyenne géométrique des nombres 20 et 45 est 30.

2) Propriété

Si (u_n) est une suite géométrique positive alors la moyenne géométrique de u_{n-1} et de u_{n+1} est u_n

$$\sqrt{u_{n+1\times}\, u_{n-1}} = u_n$$

Démonstration :

Soit u_n le terme d'une suite géométrique positive de raison q, on a u_{n+1} le terme suivant est $u_{n+1} = qu_n$, où q est la raison de la suite.
On a également : $u_n = qu_{n-1}$donc $u_{n-1} = \frac{u_n}{q}$

La moyenne géométrique du terme qui précède u_n et du terme qui le suit est égale à :
$m = \; = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}} = \sqrt{\frac{u_n}{q} \times qu_n} = \sqrt{u_n^2} = u_n$ (Attention $u_n > 0$)
Donc u_n est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

Exemple : On considère la suite géométrique (u_n) positive de premier terme $u_0 = 2$ telle que la moyenne géométrique de u_0 et u_2 soit égale à 10. Quelle est la raison de la suite (u_n) ?

Réponse : Pour une suite géométrique, chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit.
Donc en particulier ici, u_1 est la moyenne géométrique de u_0 et u_2. Donc $u_1 = 10$.
Or, $u_1 = q \times u_0$
Soit : $10 = q \times 2$ Donc $q = 5$
La suite (u_n) a pour raison 5.

V) Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q alors :

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} \dots + u_n = \sum_{i=p}^{n} u_i = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Cas particulier :

$$u_0 + u_1 + u_2 \dots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$u_1 + u_2 \dots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 \times \frac{1 - q^{n}}{1 - q}$$

Exemple : Soit $u_n = 5 \times (\frac{1}{2})^n$

Calculer $u_1 + u_2 \dots + u_{10}$

Solution :

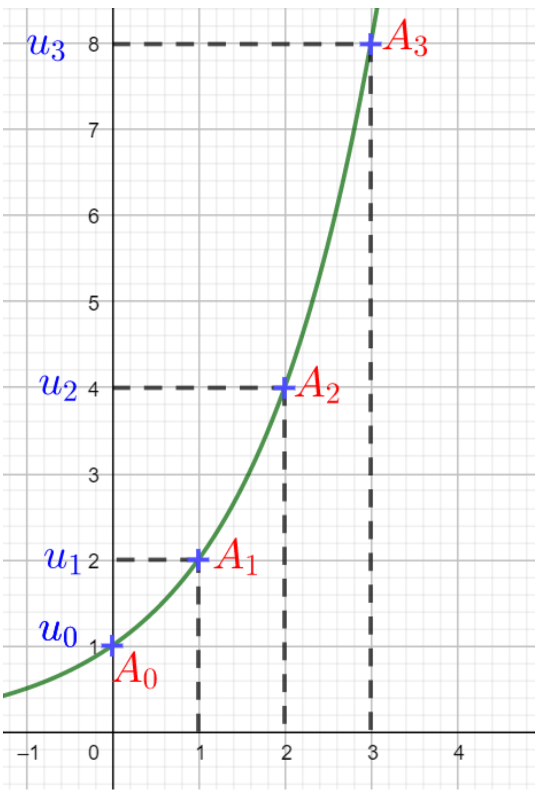
(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_1 = \frac{5}{2}$

de u_1 à u_{10} il y a 10 termes on a donc :

$$u_1 + u_2 \dots + u_{10} = u_1 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - (\frac{1}{2})} = \frac{5}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \times 2 \times (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= 5 \times (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 4{,}995$$

VI) Représentation graphique des suites géométriques



La représentation graphique d'une suite géométrique est constituée de points non alignés.

Lors de l'étude d'un phénomène discret à croissance exponentielle, les suites introduites sont les suites géométriques.