Probabilités conditionnelles

I) Probabilité conditionnelle

1) Définition

Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé. On le note $P_A(B)$ et on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Rappel : $A \cap B$ (l'intersection) est l'ensemble des issues appartenant à la fois à A et à B.

Remarques :

• $P_A(B)$ est une probabilité conditionnelle : la condition est exprimée par « sachant que A est réalisé. »

• On écrit aussi : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

• Si P(B)≠ 0 on a aussi $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

• Aussi en général, $P_B(A) \neq P(B)$

Exemple 1 : Dans une classe de Première 55% des élèves sont des filles et 40% des élèves sont des filles demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille.

Soit F l'évènement : « être une fille » et D l'évènement : « être demi-pensionnaire »

$F \cap D$ Correspond à l'évènement « être une fille demi-pensionnaire. »

$$P_F(D) = \frac{p(F \cap D)}{p(F)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{40}{55} = \frac{8}{11}$$

Exemple 2 :

1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi".
Donc $A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de pique".

Alors : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. Dans un jeu de 32 cartes nous avons 8 piques.
et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$. Dans un jeu de 32 cartes il y a un seul roi de pique.
Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$.

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un pique, on a une chance sur 8 d'obtenir le roi.

2) Méthode pour calculer une probabilité conditionnelle à partir d'un tableau croisé :

Exemple 1 :

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	**Médicament B**	**Total**
Guéris	383	291	674
Non guéris	72	54	126
Total	455	345	800

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :

A : « Le patient a pris le médicament A. »

G : « Le patient est guéri. »

Calculer : a) $P(A)$ b) $P(G)$ c) $P(G \cap A)$ d) $P(\bar{G} \cap A)$

2) a) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.

Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**'il est guéri.

b) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B.

Calculer la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**'il a pris le médicament B.

Solution de l'exercice :

1) a) La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est égale à :

$P(A) = \frac{455}{800} \approx 0{,}57 = 57\ \%$.

b) La probabilité qu'un patient soit guéri est égale à : $P(G) = \frac{674}{800} \approx 0{,}84 = 84\ \%$.

c) La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité par le médicament A correspond à la probabilité de $G \cap A$ (383 est le nombre de patient guéri et traité par le médicament A) donc $P(G \cap A) = \frac{383}{800} \approx 0{,}48 = 48\ \%$.

d) La probabilité qu'un patient ne soit pas guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à : $P(\bar{G} \cap A) = \frac{72}{800} \approx 0{,}09 = 9\ \%$.

2) a)

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

La probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**'il est guéri se note $P_G(A)$ et est égale à

$P_G(A) = \frac{383}{674} \approx 0{,}57 = 57\ \%$. On regarde uniquement la ligne des patients guéris.

b) La probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**'il a pris le médicament B se note $P_B(G)$ et est égale à $P_B(G) = \frac{291}{345} \approx 0,84 = 84\ \%$. On regarde uniquement **la colonne du médicament B.**

Exemple 2 : Un professeur de mathématiques trie sa bibliothèque dans laquelle figure 32 manuels de différents niveaux, certains conformes aux programmes actuels et d'autres, plus vieux ne sont pas conformes. La répartition des manuels est donnée dans le tableau suivant :

	Conforme	**Non conforme**	**Total**
Seconde	**6** ($S \cap C$)	**7** ($S \cap \bar{C}$)	**13**
Première	**3** ($P \cap C$)	**5** ($P \cap \bar{C}$)	**8**
Terminale	**5** ($T \cap C$)	**6** ($T \cap \bar{C}$)	**11**
Total	**14**	**18**	**32**

Il prend un manuel au hasard, et on considère les évènements suivants :

C : « Le manuel est conforme aux programmes actuels. »

S : « Le manuel est un manuel de seconde. »

T : « Le manuel est un livre de Terminale. »

Nombre de livres conformes

$$P(C) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

Nombre total de livres

Nombre de livres de seconde

$$P(S) = \frac{13}{32}$$

Nombre total de livres

Nombre de livres de terminale

$$P(T) = \frac{11}{32}$$

Nombre total de livres

Nombre de livres de **terminale conformes** ($\bar{S} \cap C$)

$$P_C(T) = \frac{5}{11}$$

Nombre total de livres **conformes**

Nombre de livres de première et terminale et conformes ($\bar{S} \cap C$)

$$P_C(\bar{S}) = \frac{3+5}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Nombre total de livres **conformes**

Nombre de livres **conformes en premières et terminales** ($\bar{S} \cap C$)

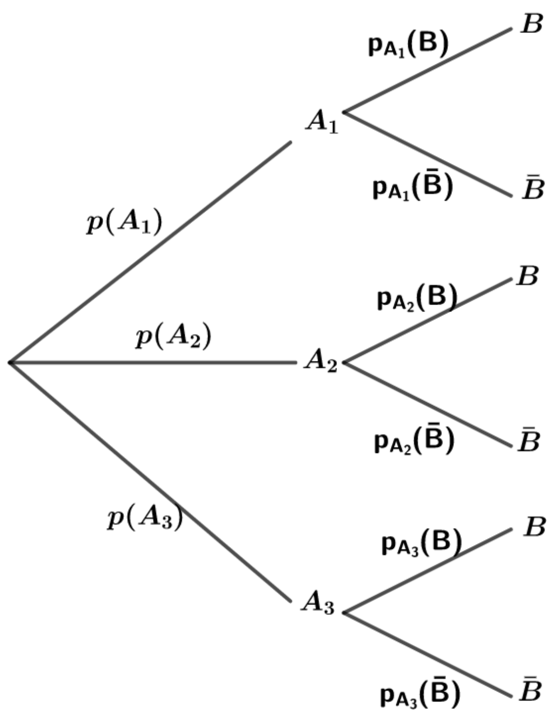
$$P_{\bar{S}}(C) = \frac{3+5}{8+11} = \frac{8}{19}$$

Nombre total de livres **de** première et terminale ($\bar{S}$)

II) Arbre de probabilité et probabilité d'une intersection

1) Règles de principe d'un arbre de probabilités

On peut représenter une expérience aléatoire par un arbre de probabilités à branches pondérées



$\boldsymbol{p(A_1 \cap B) = P_{A_1}(B) \times p(A_1)}$

- **Sur les trois premières branchent se trouvent les probabilités des évènements A_1 , A_2 et A_3.**
- **Puis sur les autres branches se trouvent les probabilités conditionnelles de B ou $\overline{B}$ sachant A_1 , A_2 ou A_3.**
- **La somme des probabilités inscrites sur les branches d'un même nœud est égal à 1.**
- **La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur les branches du chemin.**

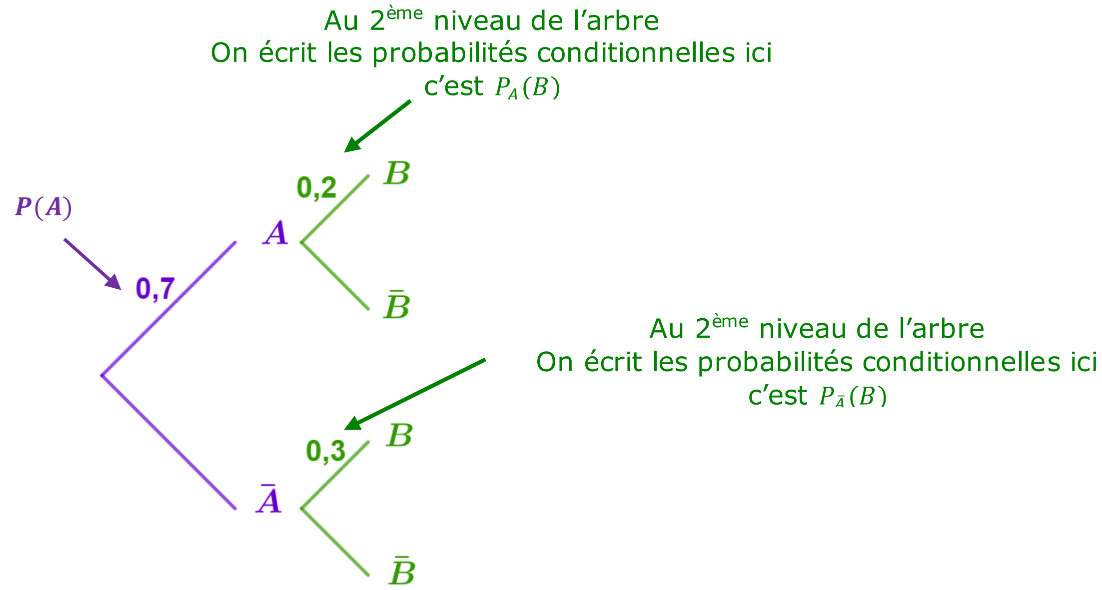
$\boldsymbol{p(A_1 \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B)}$
$\boldsymbol{p(A_2 \cap B) = p(A_2) \times p_{A_2}(B)}$
$\boldsymbol{p(A_3 \cap B) = p(A_3) \times p_{A_3}(B)}$

2) Exemple et méthode :

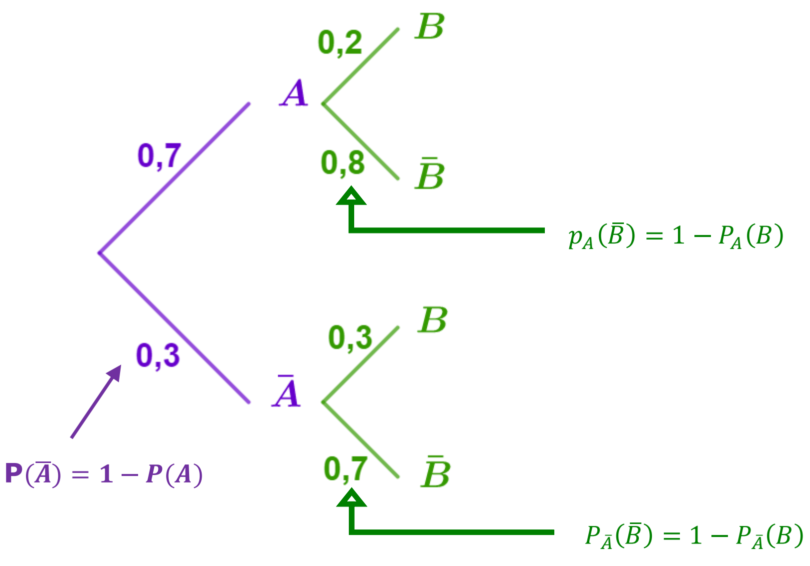
Exemple :
On donne : $P(A) = 0{,}7$, $P_A(B) = 0{,}2$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0{,}3$

- **On reporte ces probabilités dans l'arbre :**

$p(A)$=0,7 donc sur la branche qui amène à $p(A)$ on écrit sa probabilité 0,7



- **On complète les probabilités manquantes :**



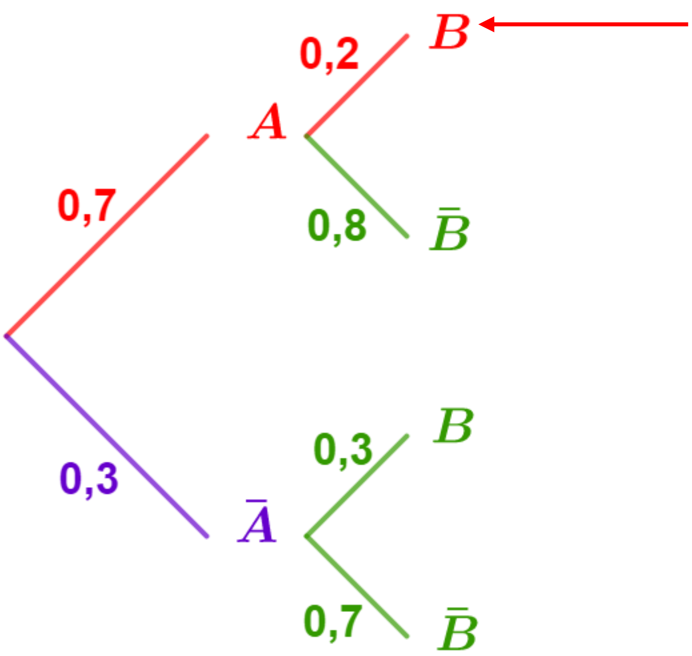
On utilise les formules :

$\mathbf{P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3}$

$p_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

- **On calcule les probabilités d'une intersection :**



On utilise la formule :

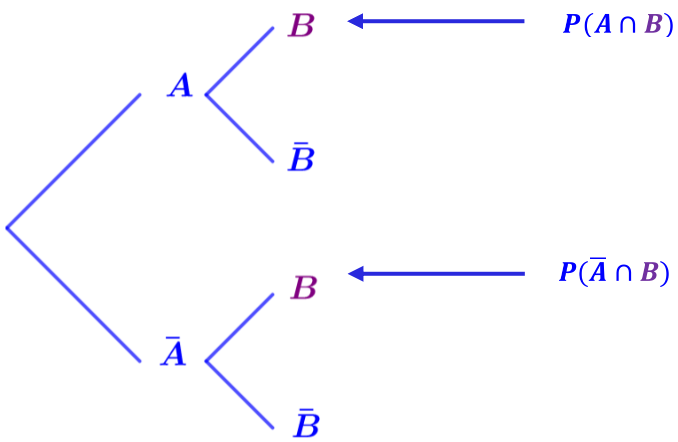
$p(A \cap B) = P_A(B) \times p(A)$

$p(A \cap B) = 0,2 \times 0,7 =$

Remarques :

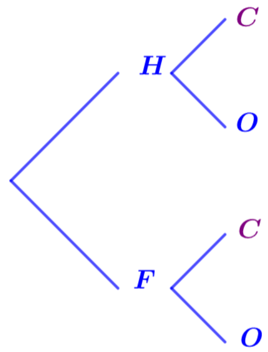
- si on permute les rôles de A et B on obtient un autre arbre. Il faut lire attentivement l'énoncé pour choisir l'arbre adapté à l'exercice. Si vous n'arrivez pas à avancer dans cotre exercice il est fort probable qu'il faille faire l'arbre dans l'autre sens.
- Un arbre pondéré correctement construit permet de justifier directement les résultats
- Il faut construire l'arbre de manière claire, soignée afin de s'en servir tout au long de l'exercice.

III) Formule des probabilités totales



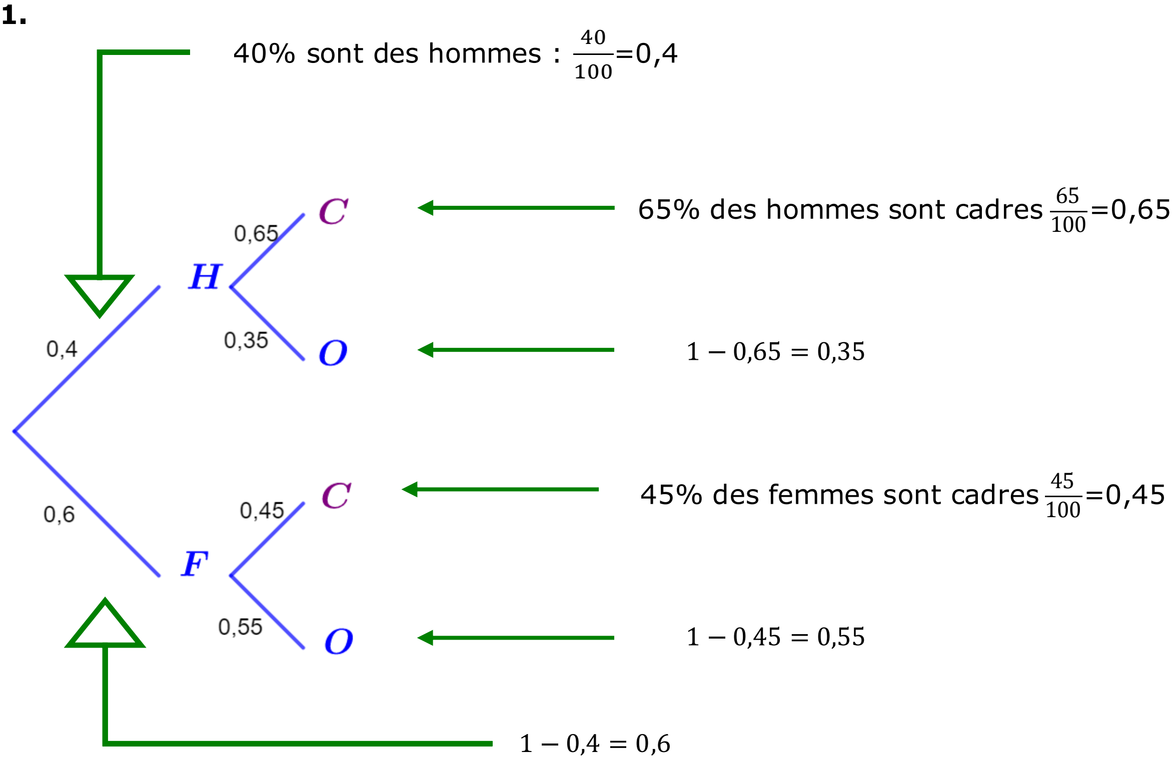
$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

Exemple : Les 1500 employés d'une grande entreprise se divisent en deux catégories : cafres et ouvriers.
On sait que cette entreprise emploie 40% d'hommes et 60% de femmes.
De plus, parmi les hommes 65% sont des cadres alors que parmi les femmes 45% sont des cadres.
1. Compléter l'arbre ci-contre en indiquant dans chacun des cas les probabilités correspondantes.
2. Calculer $P(C \cap H)$
3.Calculer $P(C \cap F)$
4. Calculer $P(C)$

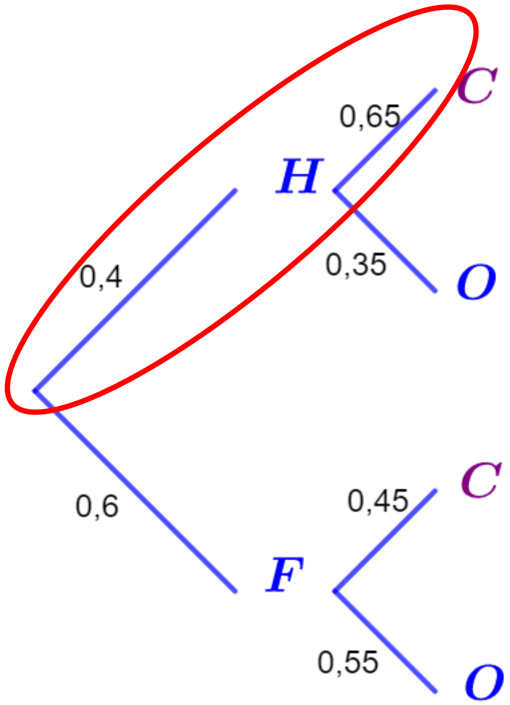


Réponse :

1.

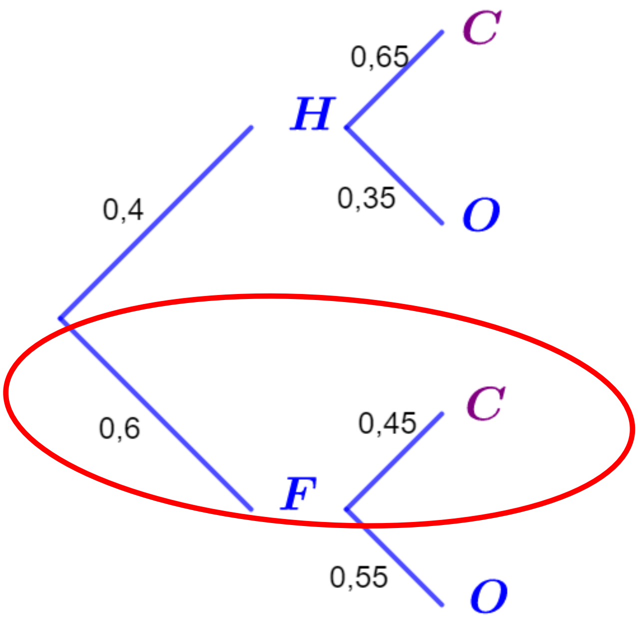


2.



$\boldsymbol{P(C \cap H) = 0,4 \times 0,65 = 0,26}$

3.



$\boldsymbol{P(F \cap C) = 0,6 \times 0,45 = 0,27}$

4. En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap F) = 0{,}26 + 0{,}27 = 0{,}53$
La probabilité d'être cadre est 0,53

IV) Evènements indépendants

1) Définition

Si A et B sont deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

A et B sont indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "On tire un roi".
Soit B l'événement "On tire un pique".
Alors $A \cap B$ est l'événement "On tire le roi de pique".

On a :
$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 4 rois
$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 8 piques et
$P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 1 roi de pique
Donc $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$

Les événements A et B sont donc indépendants.
Ainsi, par exemple, $P_B(A) = P(A)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les piques et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

Contre-exemple :

On tire 1 jeton d'un sac contenant 6 jetons numérotés de 1 à 6.
Soit A : « le jeton est pair ».
Soit B : « le jeton vaut au moins 4 ».
On a : A = {2,4,6} et B ={4 ; 5 ; 6} et A∩B ={4 ; 6}
On obtient: p(A)= $\frac{3}{6}$ et p(B)= $\frac{3}{6}$

Donc : p(A)×p(B) = $\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
Or p(A∩B) = $\frac{2}{6}$
Donc p(A∩B) ≠ p(A)×p(B) Donc A et B ne sont pas indépendants.

2) Propriété

Si A et B sont deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$
A et B sont indépendants si et seulement si : $P_A(B) = P(B)$

Exemple : En reprenant l'exemple précédent :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit *A* l'événement "On tire un roi". Soit *B* l'événement "On tire un pique". On a :
$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 4 rois
$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 8 piques et
$P_B(A)$ se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les piques donc $P_B(A) = \frac{1}{8}$
$P(A)$ se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les toutes les cartes donc
$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
Donc $P_B(A) = P(A)$ On retrouve l'indépendance des deux évènements déjà montrée au 1)

Remarque importante : Il ne faut pas confondre évènements incompatibles et évènements indépendants. En effet, deux évènements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent se réaliser en même temps c'est-à-dire lorsque A $\cap$ B = $\emptyset$