Variables aléatoires

I) Espérance d'une variable aléatoire

1) Exemple

Considérons une pièce de monnaie bien équilibrée.

On lance deux fois de suite cette pièce.

En notant P « on a obtenu pile » et F « on a obtenu face », l'ensemble des issues est Ω = {PP ; PF ; FP ; FF}

Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{4}$

On convient que chaque fois que l'on obtient « pile » on gagne 3 € et que chaque fois que l'on obtient « face » on perd 1 €.

On peut donc définir une fonction X qui a chaque issue de Ω associe le « gain » obtenu, cette fonction prend donc les valeurs 6 (pour PP), 2 pour PF ou FP et – 2 pour FF.

La probabilité que X prenne la valeur 6 est $\frac{1}{4}$ on note p (X = 6) = $\frac{1}{4}$

La probabilité que X prenne la valeur 2 est $\frac{1}{2}$ on note p (X = 2) = $\frac{1}{2}$

La probabilité que X prenne la valeur – 2 est $\frac{1}{4}$ on note p (X = – 2) = $\frac{1}{4}$

En général, on résume ces résultats dans un tableau :

Gains x_i	6	2	-2
Probabilités p_i = P (X = x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2) Espérance

a) Définition

L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple : En reprenant l'exemple précédent :

Gains x_i	6	2	-2
Probabilités p_i = P (X = x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

E(X) = 6 x $\frac{1}{4}$ + 2 x $\frac{1}{2}$ − 2 x $\frac{1}{4}$ = 2

II) Schéma de Bernoulli. Loi binomiale

1) Schéma de Bernoulli

a) Définition

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p , toute expérience aléatoire admettant deux issues exactement :

- **L'une appelée succès notée S dont la probabilité de réalisation est p**
- **L'autre appelée échec notée E ou $\bar{S}$ dont la probabilité de réalisation est $1-p$**

Exemples :

1) Un lancer de pièce de monnaie bien équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{2}$ (le succès S étant indifféremment « obtenir PILE » ou « obtenir FACE »).

2) Un lancer de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, dans lequel on s'intéresse à l'apparition de S : « obtenir un 1 » est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{6}$ et la probabilité de $\bar{S}$ est donc $1-p=\frac{5}{6}$

3) Extraire une carte d'un jeu de 32 cartes et s'intéresser à l'obtention d'un as est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{8}$ et la probabilité de $\bar{S}$ est donc $1-\mathrm{p}=\frac{7}{8}$

b) Propriété : loi de Bernoulli

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p , si on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on dit que X est une variable de Bernoulli de paramètre p, elle suit la loi de Bernoulli de paramètre p :

k	**1**	**0**
P(X = k)	p	**1 – p**

Son espérance est E(X) = p

2) Loi binomiale

a) Définition

Si dans une épreuve de Bernoulli, on répète la même expérience n fois, alors il est possible d’obtenir 0 succès, 1 succès, 2 succès, … ou n succès.

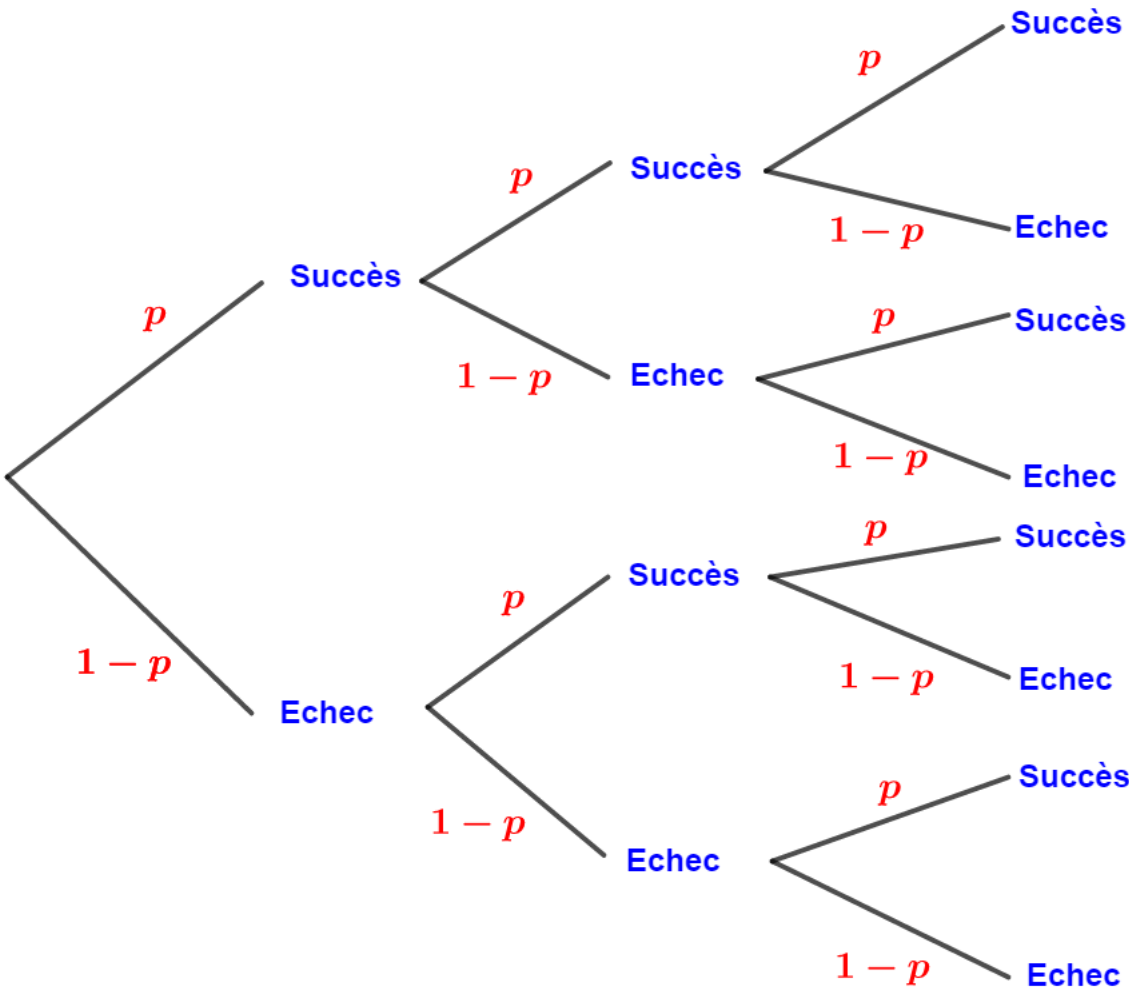
Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p.

On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Une loi binomiale est une loi de probabilité qui donne le nombre de succès de l'expérience.

n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on note $B(n\,;p)$.

Exemple 1 : Nous avons représenté dans un arbre de probabilité ci-dessous, les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



P($X = 3$) représente la probabilité d'avoir 3 succès , en regardant l'arbre ci-dessous la probabilité est : P($X = 3$)= $p \times p \times p = p^3$

P($X = 2$) représente la probabilité d'avoir 2 succès , en regardant l'arbre ci-dessous la probabilité est : P($X = 2$)= $p \times p \times (1 - p) \times 3 = 3 \times p^2(1 - p)$

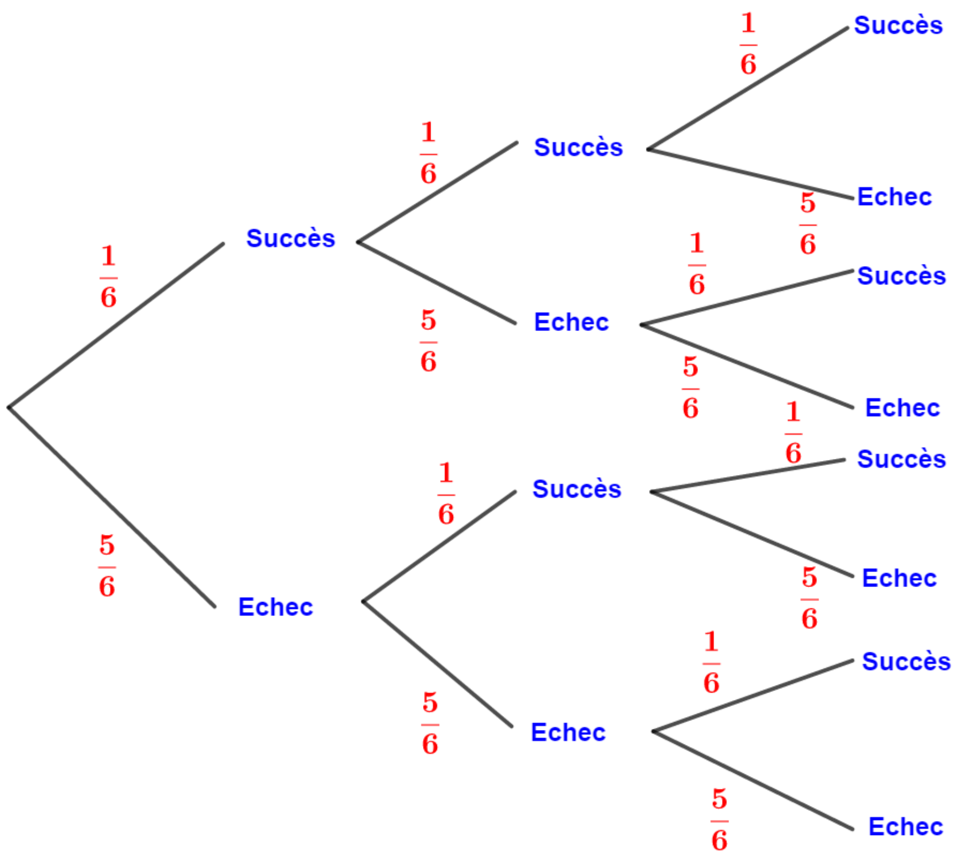
P($X = 1$) représente la probabilité d'avoir 1 succès , en regardant l'arbre ci-dessous la probabilité est : P($\mathrm{X} = 1$)= $\mathrm{p} \times (1 - \mathrm{p}) \times (1 - \mathrm{p}) \times 3 = 3 \times \mathrm{p}(1 - \mathrm{p})^2$

P($X = 0$) représente la probabilité d'avoir 0 succès , c'est-à-dire 3 échecs en regardant l'arbre ci-dessous la probabilité est :
P($X = 0$)= $(1 - p) \times (1 - p) \times (1 - p) = (1 - p)^3$

Exemple 2 : On lance 3 fois de suite un dé équilibré numéroté de 1 à 6.

On appelle X la variable aléatoire qui prend la valeur correspondant au nombre de fois où la face 6 apparaît. Déterminer la probabilité de tombé sur le 6 deux fois.

On représente un arbre de probabilité pour visualiser la situation sachant que l'on veut. On appelle succès lorsqu'on tombe sur la face numéroté 6. On veut calculer $P(X = 2)$:



$P(X = 2) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$ (il y a 3 issues succès-succès-échec)

$P(X = 2) = 3 \times \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$

b) Espérance de la loi binomiale

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètre n et p.

On a : $E(X) = n \times p$

Exemple : On lance 3 fois de suite un dé équilibré numéroté de 1 à 6.

On appelle X la variable aléatoire qui prend la valeur correspondant au nombre de fois où la face 6 apparaît. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

C'est un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ (nombre de lancer) est la probabilité du succès (tomber sur le 6) est $p = \mathbf{\frac{1}{6}}$

Donc $E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

III) Coefficients binomiaux

1) Définition

On considère un schéma de Bernoulli de n épreuves (entier naturel non nul), représenté par un arbre.
Pour tout k entier naturel $0 \leq k \leq n$, On note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors des n répétitions.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

avec $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \dots \times n$

Par convention $\binom{0}{0} = 1$

Exemples :

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} = \frac{5!}{1!\,4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$$

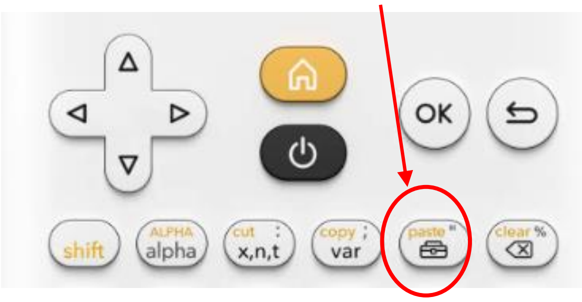
Plus généralement :

$$\binom{n}{1} = n$$

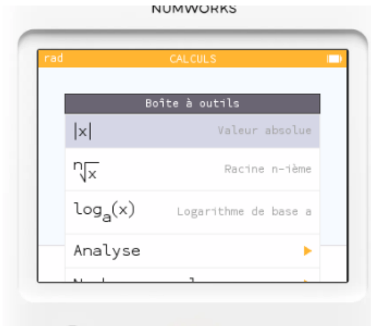
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 10$$

Avec la calculatrice Numworks :

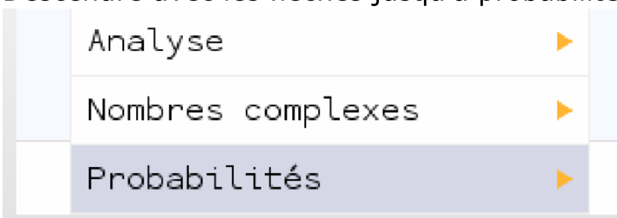
1. Aller dans calcul puis sur exe
2. Aller dans la boite à outil :



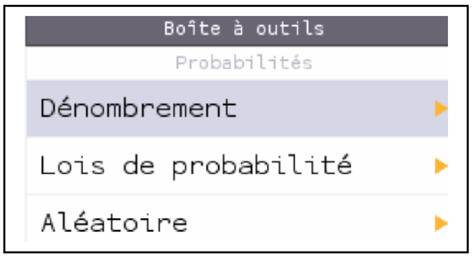
il s'affiche



3. Descendre avec les flèches jusqu'à probabilité :

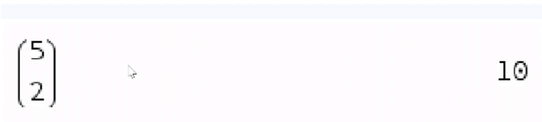


4. Puis cliquer sur exe il s'affiche :



5. Aller sur Dénombrement puis cliquer sur exe, il s'affiche :

6. Cliquer sur $\binom{n}{k}$ puis exe
7. Rentrer les valeurs dans notre exemple n=5 et p=2 et on obtient bien 10 comme résultat :



2) Loi binomiale et coefficients binomiaux

Propriété :

Lorsqu'on procède à n épreuves de Bernoulli indépendantes avec une probabilité de succès p, la variable aléatoire X qui prend pour valeurs le nombre de succès obtenus suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n\ ,\ p\ )$ et à pour loi de probabilité :

$P(X\ =\ k\ )=\binom{n}{k}\ p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout entier k tel que $0\ \leq k\ \leq n$

Exemple :

1) On considère l'expérience suivante : On lance 10 fois de suite un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire qui prend la valeur correspondant au nombre de fois où la face 1 apparaît.

a) Quelle est la loi suivie par la variable X ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement $X\ =\ 3$?

c) Quelle est la probabilité que la face 1 apparaisse au moins 1 fois ?

Solution :

a) Les lancers étant identiques et indépendants X suit une loi binomiale de paramètres $n\ =\ 10$ et $p\ =\ \frac{1}{6}$ $\mathscr{B}(10\ ,\ \frac{1}{6}\ )$

b) $P(\ X=\ 3)\ =\ \binom{10}{3}\ \left(\frac{1}{6}\right)^3\ \left(\frac{5}{6}\right)^7\ =\ 120 \times \frac{5^7}{6^{10}}\ \approx 0{,}155$

c) L'événement « la face 1 apparaît au moins une fois » correspond à l'événement « $X\ \geq\ 1$ » qui a pour événement contraire « $X\ =\ 0$ »

Donc on a $P(\ X\ \geq\ 1)\ =\ 1\ -\ P\ (\ X = 0)\ =\ 1\ -\ \binom{10}{0}\ \left(\frac{1}{6}\right)^0\ \left(\frac{5}{6}\right)^{10}\ \approx 0{,}838$

3) Propriétés des coefficients binomiaux

$\binom{n}{0}=1$ $\binom{n}{n}=1$ $\binom{n}{1}=n$ $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

Exemples : $\binom{5}{1}=1$ $\binom{4}{0}=1$ $\binom{7}{7}=1$ $\binom{50}{49}=\binom{50}{1}=50$

4) Triangle de Pascal

Ce tableau triangulaire donne la valeur des $\binom{n}{p}$ pour tout entier naturel n $n\ \geq\ 0$ et pour tout p tel que $0\ \leq p\ \leq n$ à l'intersection de la ligne portant la valeur de n et de la colonne portant la valeur de p.

Remarque :

Ce tableau peut être poursuivi pour toutes valeurs de n et de p

n \ p	0	1	2	3	**4**	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Propriété : $\binom{n}{0} = 1$

Propriété : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

6 + 4 = 10

Valeur de $\binom{6}{4}$

Propriété : $\binom{1}{1} = 1$

Propriété du triangle de Pascal :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Exemple pour $\binom{4}{2}$

n \ k	0	1	**2**	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	$\binom{4}{2}=6$	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On voit bien que : $\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4}$