Fonction exponentielle

I) Définition de la fonction exponentielle

1) Définition

Nous avons étudié dans la leçon précédente la fonction $f\ :\ x \longmapsto q^x$ (à lire avant)

• Il existe une valeur de q pour laquelle la fonction f : $x \longmapsto q^x$ vérifie $f'(0) = 1$. Cette valeur est notée e.

• Cette fonction est appelée fonction exponentielle. f : $x \longmapsto e^x$

On la note aussi exp.

Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarques:

• $e^0 = 1$

• $e^1 = e$ avec $e \approx 2,71828$ ....

2) Propriétés

Nous retrouvons les mêmes propriétés que les fonctions du type : $f\ :\ x \longmapsto q^x$ vues dans le chapitre précédent :

pour tout réel x et y :

• $e^{x+y} = e^x \times e^y$ • $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ • $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

En particulier :
• $e^x \times e^{-x} = 1$

pour tout entier relatif n:
$e^{nx} = (e^x)^n$

En particulier :

$e^{2x} = (e^x)^2$

Exemples: On utilise les propriétés dans différents cas :

• Ecrire sous la forme d'un produit : $e^{x+2} = e^x \times e^2 = e^2 \times e^x$

• Simplifier une expression : $e^{4x+1} \times e^{-2x+3} = e^{4x+1-2x+3} = e^{2x+4}$

• Factoriser une expression : $x^2e^x - 3xe^{3x} = x^2e^x - 3xe^x \times e^{2x} = xe^x(x - 3e^{2x})$

• Distribuer : $e^{2x}(e^{-2x} + 3e^{2x}) = e^{2x} \times e^{-2x} + 3e^{2x+2x} = e^0 + 3e^{4x} = 1 + 3e^{4x}$

3) Résolution d'équation

Théorème:

Soit A et B deux réels, l'équation $e^A = e^B$ équivaut à $A = B$ c'est-à-dire :

Deux exponentielles sont égales si et seulement si leurs exposants sont égaux.

Cas particulier: $e^A = 1$ équivaut à: $e^A = e^0$ ce qui équivaut à: $A = 0$

Remarques importantes:

Comme $e^x > 0$ quel que soit le réel x,

l'équation $e^x = 0$ **n'a pas de solution** et

l'équation $e^x = k$ **avec** $k < 0$ **n'a pas de solution non plus.**

Exemples:

Résoudre les équations suivantes:

- $e^{3x+1} = e^{2x-1}$

$e^{3x+1} = e^{2x-1}$ équivaut à : $3x + 1 = 2x - 1$ et on obtient donc : $x = 2$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{2\}$

- $e^{4x^2-4x+1} = 1$

$e^{4x^2-4x+1} = 1$ équivaut à : $e^{4x^2-4x+1} = e^0$ équivaut à : $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$(2x - 1)^2 = 0$ et on obtient donc : $x = \frac{1}{2}$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

- $e^{2x} - 1 = 0$

$e^{2x} - 1 = 0$ équivaut à : $e^{2x} = 1$ équivaut à : $e^{2x} = e^0$ équivaut à : $2x = 0$ donc $x = 0$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{0\}$

- $e^{2x} - 2e^x = -1$ Cette équation est équivalente à :

$(e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$

Posons $X = e^x$ on obtient l'équation :

$X^2 - 2X + 1 = 0$

$(X - 1)^2 = 0$

Donc :

$X = 1$ On obtient donc :

$e^x = 1$ c'est-à-dire $e^x = e^0$

qui a pour solution : $x = 0$

Cette équation a pour solution 0

Autre exemple :

a) Montrer que pour tout réel x : $3e^{2x} - 2e^x - 1 = (e^x - 1)(3e^x + 1)$

b) Résoudre : $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$

Réponse :

a) Pour tout réel x, $(e^x - 1)(3e^x + 1) = 3e^x \times e^x + e^x - 3e^x - 1 = 3e^{2x} - 2e^x - 1$

b) $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ équivaut à : $(e^x - 1)(3e^x + 1) = 0$

$e^x - 1 = 0$ ou $(3e^x + 1) = 0$

$e^x = 1$ ou $3e^x = -1$

$e^x = e^0$ ou $e^x = -\frac{1}{3} < 0$ ce qui est impossible

$x = 0$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{0}\}$

II) Etude de la fonction exponentielle

La fonction $x \longmapsto e^x$ est une fonction du type $x \longmapsto q^x$ avec $q = e > 1$:

1) Fonction dérivée

La fonction $x \longmapsto e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Comme $e > 1$ alors la fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est la fonction exponentielle elle-même c'est-à-dire :
Si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$

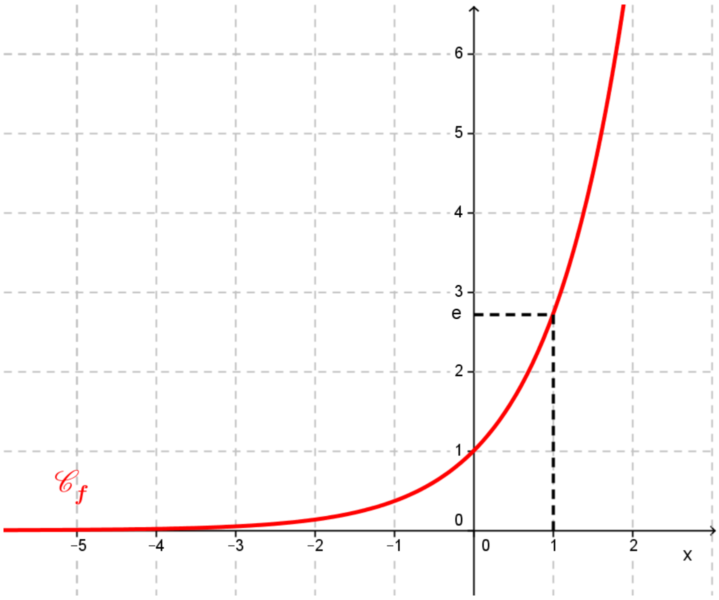
2) Tableau de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle

a) Tableau de variation :

Les résultats précédents nous permettent d'écrire:

x		0		1	
$f'(x)$			+		
$f(x)$		1		e	

b) Courbe représentative de la fonction exponentielle



III) Résolution d'inéquations

Conséquences importantes:

> **Pour tout nombres A et B, comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$: $e^A \leq e^B$ équivaut à $A \leq B$**

Cas particulier : $e^A \geq 1$ équivaut à: $e^A \geq e^0$ ce qui équivaut à: $A \geq 0$

Exemple 1: Résolvez l'inéquation suivante : $e^{2x} < e^x$

Cette inéquation est équivalente à l'inéquation : $2x < x$

qui est équivalente à: $x < 0$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :]$-\infty$; 0]

Exemple 2: Résolvez l'inéquation suivante : $e^{x^2-16} > 1$

$e^{x^2-16} > 1$ revient à écrire: $e^{x^2-16} > e^0$ ce qui équivaut à : $x^2 - 16 > 0$

$x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$ on obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x-4$		$-$			0	$+$	
$x+4$		$-$	0		$+$		
x^2-16		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty\,;\,-\mathbf{4}\,[\ \cup\ ]\mathbf{4}\,;\,+\infty[$

IV) Exemple d'étude de fonction:

Etudier la fonction f définie sur [-5 ;5] par $f(x) = (4x-1)e^x$

a) La fonction f est définie et dérivable sur [-5 ;5]

$f(x) = uv$ avec

$u(x) = 4x-1$ $u'(x) = 4$

$v(x) = e^x$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = u'v + uv'$

$f'(x) = 4e^x + (4x-1)e^x = e^x(4+4x-1) = \boldsymbol{e^x(4x+3)}$

b) $f'(x) = 0$ si $e^x(4x+3) = 0$ c'est-à-dire si $4x+3=0$ soit $\boldsymbol{x = -\frac{3}{4}}$

c) on obtient le tableau de variation suivant :

x	-5		$-\frac{3}{4}$		5
$4x+3$		$-$	0	$+$	
e^x			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-21e^{-5}$ $\approx -0{,}14$	$\searrow$	$-4e^{-\frac{3}{4}}$ $\approx -1{,}89$	$\nearrow$	$19e^5$ $\approx 2\,819{,}85$

d) La représentation graphique de la fonction f est :