Suites géométriques

I) Définition

Soit n_0 est un nombre entier naturel.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. On dit qu'elle est géométrique si, partant du

TERME INITIAL u_{n_0}, pour passer d'un terme au suivant, on

MULTIPLIE toujours par le même nombre appelé RAISON

Exemple: Une voiture, achetée neuve coûtait 20 000 € (en 2008), perd chaque année 20% de sa valeur.

• Au bout d'un an : la voiture coûtait 20% moins cher :
$20\ 000 \times (1 - \frac{20}{100}) = 20\ 000 \times \mathbf{0{,}8} = 16\ 000$. **En 2009 la voiture coûtera 16 000 €.**

• Au bout de deux ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur :
$16\ 000 \times (1 - \frac{20}{100}) = 16\ 000 \times \mathbf{0{,}8} = 12\ 800$. **En 2010 la voiture coûtait 12 800 €.**

• Au bout de trois ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur :
$12\ 800 \times (1 - \frac{20}{100}) = 12\ 800 \times \mathbf{0{,}8} = 10\ 240$. **En 2011 la voiture coûtait 10 240.€.**

Et ainsi de suite … on multiplie la valeur de la voiture de l'année précédente par 0,8 pour obtenir celle de l'année suivante.

Soit u_0 la valeur de la voiture en 2008. $u_0 = 20\ 000$

u_1 est la valeur de la voiture au bout d'un an c'est-à-dire $u_1 = u_0 \times \mathbf{0{,}8} = 16\ 000$

u_2 est la valeur de la voiture au bout de deux ans c'est-à-dire $u_2 = u_1 \times \mathbf{0{,}8} = 12\ 800$

Soit u_n la valeur de la voiture au bout de n années, $u_n = u_{n-1} \times \mathbf{0{,}8}$ où u_{n-1} est la valeur de la voiture au bout de $n-1$ années.

Cette suite est géométrique : On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours pas le même nombre (dans notre cas 0,8)

II) Les deux formules de calculs de termes.

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q ($q \in \mathbb{R}^*$)

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, une suite, et n un entier naturel supérieur ou égal à n_0,.

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur q appelée raison donc :

$$u_{n+1} = u_n \times \mathbf{q}$$

On peut aussi obtenir directement la valeur de u_n à partir de celle de u_{n_0} en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$$

Cas particulier où le 1er rang est 0 : $u_n = u_0 \times q^n$

Exemples :

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie par: $u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_1; u_2 ; u_3 puis u_{15}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par 3 , la suite est donc géométrique de raison 3 et de 1^er terme 2

2) $u_1 = u_0 \times 3 = 2 \times 3 = 6$ $\quad$ $\boldsymbol{u_1 = 6}$

$u_2 = u_1 \times 3 = 6 \times 3 = 18$ $\quad$ $\boldsymbol{u_2 = 18}$

$u_3 = u_2 \times 3 = 18 \times 3 = 54$ $\quad$ $\boldsymbol{u_3 = 54}$

On applique la 2^ème formule :

$u_{15} = u_0 \times 3^{15}$

$u_{15} = 2 \times 3^{15}$ $\quad$ $\boldsymbol{u_{15} = 28\ 697\ 814}$

3) $u_n = u_0 \times 3^n$ $\quad$ $\boldsymbol{u_n = 2 \times 3^n}$

Exemple 2 : Soit la suite (u_n) définie par:

$\boldsymbol{u_{n+1}} = \frac{u_n}{2}$ et $u_1 = 3$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par $\frac{1}{2}$ .La suite est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^er terme 3 .

2) $u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $\quad$ $\boldsymbol{u_2 = 1{,}5}$

$u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$ $\quad$ $\boldsymbol{u_3 = 0{,}75}$

$u_4 = \frac{u_3}{2} = \frac{0{,}75}{2} = 0{,}75$ $\quad$ $\boldsymbol{u_4 = 0{,}375}$

On applique la 2ème formule :

$u_{30} = u_1 \times (\frac{1}{2})^{30-1}$

le 1er terme de la suite est u_1 au lieu de u_0
La suite a donc un terme de moins donc
la formule est $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

$u_{30} = 3 \times (\frac{1}{2})^{29}$

$\boldsymbol{u_{30} = \frac{3}{2^{29}}}$

3) $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$

$u_n = \boldsymbol{\frac{3}{2^{n-1}}}$

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_3 = 4$ et $u_6 = 32$.
Déterminer la raison et le 1er terme u_0 de u

Réponse :

u est une suite géométrique de raison q. Pour tous entiers m et n :

$u_n = u_m \times q^{(\mathrm{n-m})}$

$u_6 = u_3 \times q^{(6-3)}$

$32 = 4 \times q^3$ donc $q^3 = 8$. Donc $q = 2$

Son 1er terme est u_0 : $u_3 = u_0 \times q^3$

on obtient : $4 = u_0 \times 2^3$ Donc $u_0 = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}$.

La suite géométrique u a pour raison 2 et a pour 1er terme $u_0 = \frac{1}{2}$

Exemple 4 : Soit la suite (u_n) définie par: $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n}$

1. Montrer que pour tout entier n , $u_n = 5 \times (\frac{5}{4})^n$
2. Montrer que u est une suite géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme U_0

Réponse :

1. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n} = \frac{5 \times 5^n}{4^n} = 5 \times \frac{5^n}{4^n} = 5 \times (\frac{5}{4})^n$

2. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 \times (\frac{5}{4})^{n+1} = 5 \times (\frac{5}{4})^n \times \frac{5}{4} = u_n \times \frac{5}{4}$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{5}{4}$.

$u_0 = \frac{5^1}{4^0} = \frac{5}{1}$

Son 1er terme est $u_0 = 5$

III) Somme des puissances successives d'un nombre réel

1) Propriété:

Pour tout entier naturel non nul et $q \neq 1$:

$$\mathbf{1 + q + q^2 .... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Exemple: Calculer S = 1 +10 + 10² + ...+ 10^5

S = 1 +10 + 10² + ...+ 10^5 = $\frac{1 - 10^{5+1}}{1 - 10} = \frac{1 - 10^6}{1 - 10} = \frac{1 - 1\,000\,000}{1 - 10} = \frac{-999\,999}{-9} = \mathbf{111\,111}$

S =111 111

2) Démonstration:

S = $1 + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2 + q^3 + ...+ q^n$

$\boldsymbol{q}S = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2 + q^3 + q^4 + ...+ q^{n+1}$

$\boldsymbol{q}S - S = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2 + q^3 + q^4 + ...+ q^{n+1} - (1 + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2 + q^3 + ...+ q^n) =$

$= \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2 + q^3 + q^4 + ...+ q^{n+1} - 1 - \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^2 - q^3 - ....- q^n$

$= -1 + \underbrace{(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q})} + \underbrace{(\boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^2)} + \underbrace{(q^3 - q^3)} + ...+ \underbrace{(q^n - q^n)} + q^{n+1}$

$= -1 + 0 + 0 + 0 + ...+ 0 + q^{n+1}$

On obtient donc :

$qS - S = -1 + q^{n+1}$ donc :

$S\,(q - 1) = -1 + q^{n+1}$

On obtient donc: $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

D'où la formule : $\mathbf{1 + q + q^2 + q^3 + ...+ q^n} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

IV) Limite d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de raison q **strictement positive**.

Pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$.

1) Limite d’une suite géométrique

a) Position du problème

Etudier la limite de la suite (u_n), c’est observer le comportement des termes de la suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes (n tend vers $+\infty$).

	A	B
1	n	U_n
2	1	2
3	2	4
4	3	8
5	4	16
6	5	32
7	6	64
8	7	128
9	8	256
10	9	512
11	10	1024
12	11	2048
13	12	4096
14	13	8192
15	14	16384
16	15	32768

Ci-contre $u_n = 2^n$, on peut constater à l’aide d’un tableur que lorsque n devient grand u_n prend des valeurs de plus en plus grandes. On dira que la limite de u_n est $+\infty$

	A	B
1	n	U_n
2	1	0,5
3	2	0,25
4	3	0,125
5	4	0,0625
6	5	0,03125
7	6	0,015625
8	7	0,0078125
9	8	0,00390625
10	9	0,00195313
11	10	0,00097656
12	11	0,00048828
13	12	0,00024414
14	13	0,00012207
15	14	6,1035E-05
16	15	3,0518E-05

Ci-contre $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on peut constater à l’aide d’un tableur que lorsque n devient grand u_n prend des valeurs de plus en plus proches de 0. On dira que la limite de u_n est 0

b) Théorème

<table>
<tr><td></td><td>$0 < q < 1$</td><td>$q > 1$</td></tr>
<tr><td>$u_0 > 0$</td><td rowspan="2">La suite (u_n) a pour limite 0</td><td>La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.</td></tr>
<tr><td>$u_0 < 0$</td><td>La suite (u_n) a pour limite $-\infty$.</td></tr>
</table>

2) Cas particuliers :

- **Si q = 0 alors u_n = 0 pour $n \geq 1$**
- **Si q = 1 alors u_n = u_0 pour $n \geq 1$**

3) Exemples

Exemple 1: Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison q $= \frac{2}{5}$
Comme 0 < q <1 la limite de (u_n) est 0. On écrit lim u_n=0 ce qui signifie que les termes de la suite s'approchent de 0 lorsque n devient grand.

Exemple 2 : Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison q = 5

Comme q >1 et $u_0 > 0$, la limite de la suite (u_n) est $+\infty$. On écrit lim u_n=$+\infty$ ce qui signifie que les termes de la suite deviennent de plus en plus grands lorsque n devient grand.

Exemple 3 : Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -1$ et de raison q = 4

Comme q >1 et $u_0 < 0$, la limite de la suite (u_n) est $-\infty$. On écrit lim u_n=$-\infty$ ce qui signifie que les termes de la suite deviennent de plus en plus petits lorsque n devient grand.