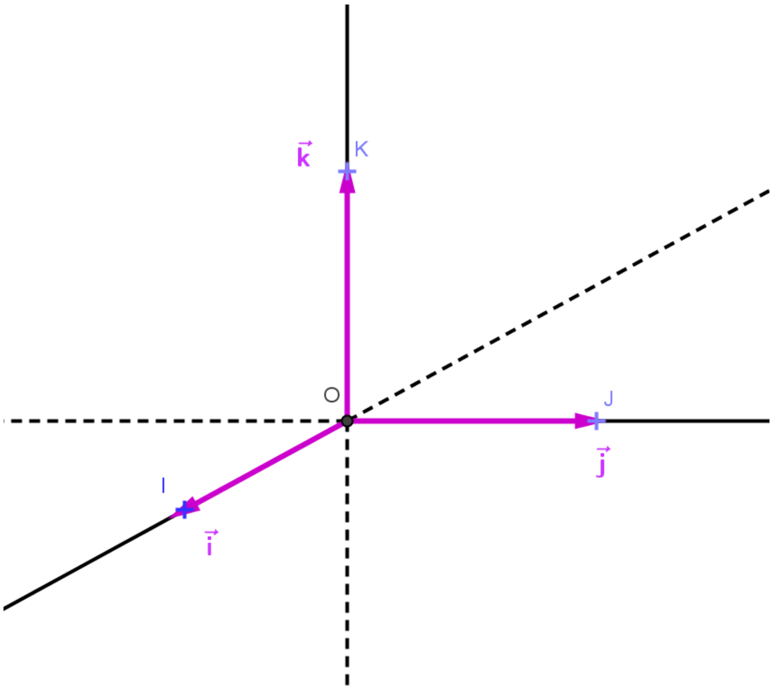
Repérage dans l'espace

I) Coordonnées dans l'espace

1) Définition

Un repère (O;I,J,K) de l'espace est défini par quatre points non coplanaires (n'appartenant pas au même plan) : le point O est l'origine , la droite (OI) est l'axe des abscisses, la droite (OJ) est l'axe des ordonnées et la droite (OK) est l'axe des côtes.

Remarque : On note aussi le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ où $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ sont des vecteurs non coplanaires. Si de plus ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de longueurs unité on dit que le repère est orthonormal.



2) Propriété

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(\,x\,;\,y\,;\,z\,)$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ où x s'appelle l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote du point M

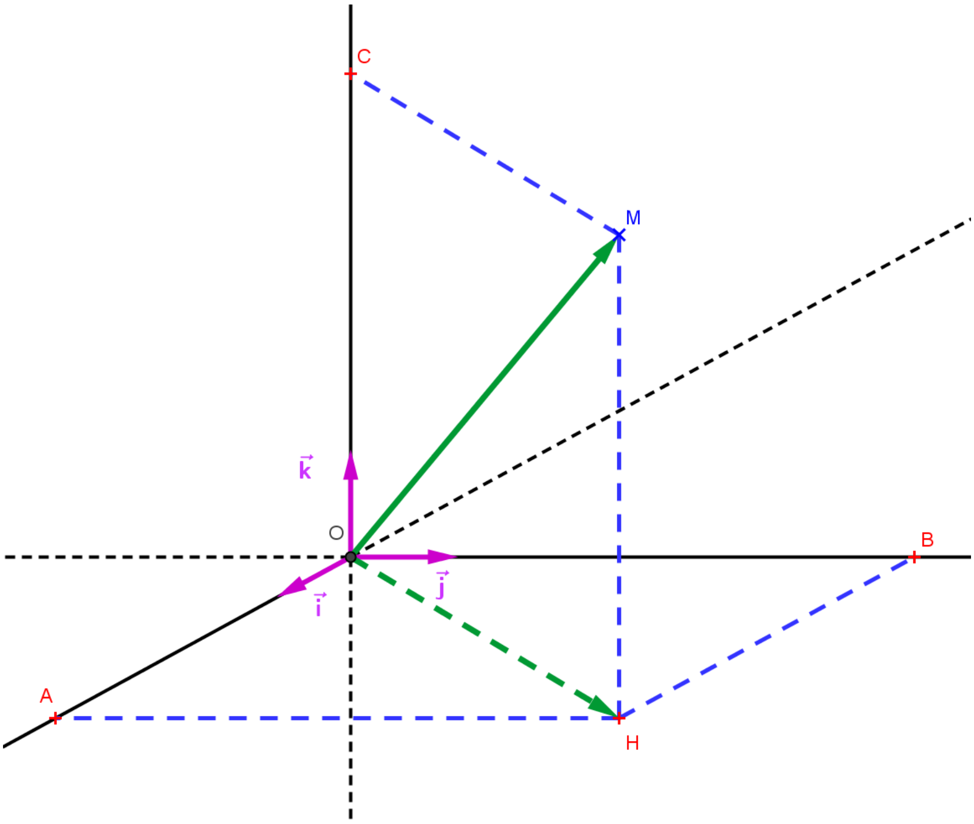
Sur La figure ci-dessous on a :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OC}$ avec $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Mais $\overrightarrow{OA} = x\vec{\imath}$; $\overrightarrow{OB} = y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OC} = z\vec{k}$ $\quad (\,x, y\,, z\,)$ réels

$\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ étant respectivement colinéaires à $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

De là, $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.



II) Représentations paramétriques :

1) d'une droite

a) Définition

Le point M appartient à la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ non nul si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est à dire s'il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM}$ = $t\,\vec{u}$.

b) Propriété

Dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$, la droite passant par $A\,(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\,\alpha\,;\,\beta;\gamma)$admet pour représentation paramétrique le système :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un réel}$$

Démonstration

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $(x - x_A;\, y - y_A;\, z - z_A)$ on a donc bien $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$

Exemples

Exemple 1 : Ecrire une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A\left(1\,;\,-2\,;\,5\right)$ de vecteur directeur $\vec{u}\,(\,-3;0\,;1\,)$

Solution :

Soit M le point de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, M appartient à la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si on a l'égalité :

$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ $\quad\left\{\begin{array}{l} x-1=-3t \\ y+2=0 \\ z-5=t \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x=1-3t \\ y=-2 \\ z=5+t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$

Exemple 2 : Soit la droite (D) dont une représentation paramétrique s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} x=-3+2m \\ y=5-2m \\ z=1 \end{array}\right. \qquad m \in \mathbb{R}$$

Déterminer un vecteur directeur de (D) et deux points appartenant à (D)

Solution :

On obtient un vecteur directeur grâce aux coefficients du paramètre m
soit $\vec{u}(\,2;-2;\ 0)$

On obtient des coordonnées de points de la droite (D) en remplaçant m par des valeurs dans les trois égalités :

$A\,(\,-1\ ;\ 3\ ;\ 1\,)$ pour $m\ =\ 1$

$B(\,3;\ -1;\ 1\,)$ pour $m\ =\ 3$

Exemple 3 : La droite (D) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=1+5k \\ y=\ -2+k \\ z=-4+3k \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{R}$

passe-t-elle par les points $E\big(\,11\ ;\ 0\ ;\ 2\,\big)$? $F\,\big(\,16\ ;\ 1;\ 6\big)$?

Solution :

On remplace x ; y ; z par les coordonnées du point si chaque équation donne la même valeur de k alors le point est sur la droite sinon il n'est pas sur la droite.

● En remplaçant les coordonnées du point E dans chaque équation on obtient:

$\left\{\begin{array}{l} 11=1+5k \\ 0=\ -2+k \\ 2=-4+3k \end{array}\right.$ ce qui donne $\left\{\begin{array}{l} k=\frac{10}{5}=2 \\ k=\ 2 \\ k=\frac{6}{3}=2 \end{array}\right.$

On obtient la même valeur de k donc le point E est sur la droite (D).

● En remplaçant les coordonnées du point F dans chaque équation on obtient:

$\left\{\begin{array}{l} 16=1+5k \\ 1=\ -2+k \\ 6=-4+3k \end{array}\right.$ ce qui donne $\left\{\begin{array}{l} k=\frac{15}{5}=3 \\ k=\ 3 \\ k=\frac{10}{3}\neq 3 \end{array}\right.$

On obtient des valeurs différentes de k donc le point F n'est pas sur la droite (D).

2) D'un plan

a) définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

Le point M appartient au plan contenant le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si, et seulement si, il existe deux réels m et k tels que $\overrightarrow{AM} = m\,\vec{u} + k\vec{v}$.

b) Propriété

Dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, le plan contenant le point $A\,(x_A;\ y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\,\alpha\,;\,\beta;\gamma)$ et $\vec{v}(a;b;c)$ admet pour représentation paramétrique le système :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha m + ka \\ y = y_A + \beta m + kb \\ z = z_A + \gamma m + kc \end{cases}$$ **où m, k sont des réels**

Démonstration:

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $(x - x_A; y - y_A;\ z - z_A)$ on a donc bien $\overrightarrow{AM} = m\,\vec{u} + k\vec{v}$

Exemples :

Exemple 1: Ecrire une représentation paramétrique du plan contenant le point $A\left(1\,;\,-2\,;\,5\right)$ de vecteurs directeurs $\vec{u}(\,-3;\ 0;\ 1\,)$ et $\vec{v}\,(\,1;-2{:}\,3)$

Solution :

On vérifie d'abord que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.

Soit M le point de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, M appartient au plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si on a l'égalité :

$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + m\,\vec{v}$ ce qui se traduit par: $\begin{cases} x - 1 = -3t + m \\ y + 2 = 0 - 2m \\ z - 5 = t + 3m \end{cases}$ $t \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{R}$

ou encore $\begin{cases} x = 1 - 3t + m \\ y = -2 - 2m \\ z = 5 + t + 3m \end{cases}$ $t \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{R}$

Exemple 2 : Soit le plan (P) dont une représentation paramétrique s'écrit :

$$\begin{cases} x = -3 + 2m - k \\ y = 5 - 2m + 2k \\ z = 1 - 4k \end{cases} \qquad m \in \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Déterminer deux vecteurs directeurs de (P) et trois points appartenant à (P)

Solution :

On obtient un vecteur directeur grâce aux coefficients du paramètre m

Dans notre exemple on a : $\vec{u}(2\,;\,-2;0)$ et un deuxième grâce aux coefficients du paramètre k soit $\vec{v}(-1\,;\,2\,;-4)$

On obtient des coordonnées de points du plan (P) en remplaçant m et k par des valeurs
Par exemple on a :
$A\,(-2\,;\,5\,;-3\,)$ pour $m\ =\ 1$ et $k\ =\ 1$

$B(\,5\,;\,-5;\,9\,)$ pour $m\ =\ 3$ et $k\ =\ -2$ et

$C(-3;\,5\,;1)$ pour $m\ =\ 0$ et $k\ =\ 0$

III) Positions relatives de deux droites

1) Droites parallèles

Deux droites (D) et (D') sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exemples :

Exemple 1 : Les droites (D) et (D') de représentation paramétriques respectives

(D) $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = \ -6t \\ z = 5 + 8t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et (D') $\begin{cases} x = 1 - 6k \\ y = 4 + 9k \\ z = -12k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

sont parallèles car on peut déterminer des vecteurs directeurs respectifs de (D)

$\vec{u}(4\,;-6\,;8)$ et de (D') $\vec{v}(-6\,;9\,;-12)$ avec $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$

Exemple 2 : Les droites (D) et (D') de représentation paramétriques respectives

(D) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = \ -2t \\ z = 5 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et (D') $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 4k \\ z = -3k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

ne sont pas parallèles car on peut déterminer des vecteurs directeurs respectifs de (D) :

$\vec{u}(1\,;-2\,;-1)$ et de (D') $\vec{v}(0\,;\,4\,;-3)$ $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

2) Droites non parallèles

Deux droites (D) et (D') ayant des vecteurs directeurs non colinéaires ne sont pas parallèles.

Si elles possèdent un point commun elles sont sécantes, sinon elles sont non coplanaires.

Exemples :

Exemple 1 : Les droites (D) et (D′) de représentation paramétriques respectives

(D) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = 5 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et (D′) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 4k \\ z = -3k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

ne sont pas parallèles car on peut déterminer des vecteurs directeurs respectifs de (D) $\vec{u}(1\,;-2\,;-1)$ et de (D′) $\vec{v}(0\,;\,4\,;-3)$ avec $\vec{v}$ et $\vec{u}$ non colinéaires.

Sont-elles sécantes ou non coplanaires ?

Solution

Il faut savoir si ces droites ont un point en commun. Elles auront un point commun si le système d'équations : $\begin{cases} 1 = 2 + t \\ 4 + 4k = -2t \\ -3k = 5 - t \end{cases}$ d'inconnues t et k possède une solution.

Or ce système est équivalent au système $\begin{cases} t = -1 \\ 4k = -2 \\ -3k = 6 \end{cases}$ et ce dernier ne possède aucune solution (car on obtient deux valeurs différentes de k)donc (D) et (D′) sont non coplanaires.

Exemple 2 : Les droites (D) et (D′) de représentation paramétriques respectives

(D) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et (D′) $\begin{cases} x = 4 - 2k \\ y = 3 + k \\ z = 1 - 5k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

ne sont pas parallèles car on peut déterminer des vecteurs directeurs respectifs de (D) : $\vec{u}(1; 2;, -1)$ et de (D′) $\vec{v}(-2; 1; -5)$ avec $\vec{v}$ et $\vec{u}$ non colinéaires.

Sont-elles sécantes ou non coplanaires ?

Solution :

Il faut savoir si ces droites ont un point en commun. Elles auront un point commun si le système d'équations : $\begin{cases} 4 - 2k = 2 + t \\ 3 + k = -1 + 2t \\ 1 - 5k = 3 - t \end{cases}$ d'inconnues t et k possède une solution.

ce système est équivalent au système $\begin{cases} t + 2k = 2 \\ -2t + k = -4 \\ t - 5k = 2 \end{cases}$ et ce dernier est encore équivalent au système $\begin{cases} t + 2k = 2 \\ -2t + k = -4 \\ 7k = 0 \end{cases}$ en soustrayant la première ligne **à** la troisième on obtient la solution $k = 0$ et $t = 2$.

(D) et (D′) sont sécantes et leur point d'intersection s'obtient en remplaçant t par 2 dans la représentation paramétrique de (D) ou k par 0 dans celle de (D′)

On obtient le point $A\,(\,4\,;\,3\,;\,1\,)$