

# Combinatoire

## I) Ensemble des $p$ -uplets (ou $p$ -listes) distincts d'un ensemble fini $E$ . Permutations.

### 1) Définition

$E$  est un ensemble fini à  $n$  éléments,  $p$  est un nombre entier naturel tel que  $1 \leq p \leq n$ , le nombre de  $p$ -uplets d'éléments distincts de  $E$  à  $n$  éléments est :

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1)$$

**Attention :** Dans ce cas l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.

**Démonstration :**

Choisir un  $p$ -uplet revient à remplir  $p$  cases avec des éléments distincts de  $E$ .

| Case 1                    | Case 2                        | Case 3                        | Case $p$                            |
|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| $n$<br>choix<br>possibles | $n - 1$<br>choix<br>possibles | $n - 2$<br>choix<br>possibles | $n - (p - 1)$<br>choix<br>possibles |

Pour la première case (le premier nombre) on a  $n$  possibilités.

Pour la deuxième case (le deuxième nombre) il reste  $n - 1$  possibilités.

Pour la troisième case (le troisième nombre) il reste  $n - 2$  possibilités.

On continue de façon à ce que les cases 1 ; 2 ; ..... ;  $p - 1$  soient remplies

Pour la  $p$ ème case il reste  $(n - (p - 1))$  possibilités soit  $n - p + 1$  possibilités

Le nombre de  $p$ -uplets est donc  $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1)$

**Exemples :**

Le nombre de 6-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 9 éléments est :

$$P = 6 \quad n = 9 \quad \text{et} \quad n - p + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60\,480$$

Le nombre de 6-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 9 éléments est 60 480

## II) Permutation des éléments d'un ensemble

### 1) Définition

$E$  est un ensemble fini à  $n$  éléments.

Une permutation des éléments de  $E$  est un  $n$ -uplets d'éléments distincts de  $E$ .

**Remarque :** Faire une permutation des éléments de  $E$  revient à écrire les éléments de  $E$  dans tous les ordres possibles.

Cela revient au cas précédent avec  $p = n$

## 2) Propriété

**Le nombre de permutation d'un ensemble fini  $E$  à  $n$  éléments est :**

$$n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times 1$$

**On note ce nombre  $n!$**

**Remarque :** Par convention  $0! = 1$

**Exemple :** Le nombre de permutation de l'ensemble  $\{a ; b ; c\}$  est  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

## 3) Conséquence

**Le nombre de  $p$ -uplets d'éléments distincts de  $E$  à  $n$  éléments est :**

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**Exemples :**

**Exemple 1 :** Sur un piano, Elia joue avec sept notes : Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si.

Combien de mélodies différentes peut-elle obtenir avec cinq notes distinctes de cet ensemble ?

**Solution :** On cherche le nombre de 5-uplets distincts dans un ensemble à 7 éléments distincts :

$\frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2520$  donc Elia peut obtenir 2520 mélodies différentes de cinq notes distinctes prises parmi les 7 notes.

**Exemple 2 :** Lors de l'épreuve d'athlétisme au J.O. 2024, 10 athlètes s'élancent au départ d'une course de 200m.

Combien y-a-t-il d'ordres d'arrivée possibles en supposant qu'il n'y aura ni abandon, ni ex-aequo ?

**Solution :** Il s'agit d'ordonner 10 athlètes, on cherche donc à déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à 10 éléments :

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$$

Le nombre d'ordres d'arrivée possibles est 3 628 800

## **II) Combinaisons**

### **1) Combinaison de $p$ éléments parmi $n$**

#### **a. Définition**

$E$  est un ensemble fini à  $n$  éléments ( $n \in \mathbb{N}$ ). et  $p$  un nombre entier naturel tel que  $0 \leq p \leq n$ .

Une combinaison de  $p$  éléments de l'ensemble  $E$  est un sous ensemble de  $p$  éléments de  $E$ .

Le nombre de combinaisons de  $p$  éléments parmi les  $n$  éléments de  $E$  est noté  $\binom{n}{p}$  qui se lit «  $p$  parmi  $n$  »

**Remarque :** Dans ce cas, l'ordre des éléments n'a pas d'importance et les éléments ne se répètent pas.

**Exemple :**

$\{3; 4\}$  est une combinaison de deux éléments de l'ensemble  $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

$\{1; 3; 4\}$  est une combinaison de trois éléments de l'ensemble  $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi  $\{3; 4\}$  et  $\{4; 3\}$  correspondent à la même combinaison de  $E$ .

#### **b. Nombre de combinaisons**

Pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n \text{ et}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \text{ Si } 1 \leq p \leq n$$

**Exemple :**

Une classe composée de 20 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice on ne distingue pas les délégués et les sous-délégués.

**a.** Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?

**b.** Lilou dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Riccardo est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

**Réponse :**

**a.** On compte le nombre de combinaisons de 4 élèves parmi  $20+16 = 36$  c'est-à-dire :

$$\binom{36}{4} = \frac{36!}{4!(36-4)!} = \frac{36!}{4!(32)!} = \frac{36 \times 35 \times 34 \times 33}{4!} = \frac{36 \times 35 \times 34 \times 33}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 58\,905$$

Il existe 58 905 possibilités pour cette élection.

**b.** Tout d'abord on compte le nombre de possibilités tel que Lilou et Riccardo soient élus.  
Si Lilou et Riccardo sont élus il reste à choisir 2 élèves parmi les 34 (36-2) :

$$\binom{34}{2} = \frac{34!}{2!(34-2)!} = \frac{34!}{2!(32)!} = \frac{34 \times 33}{1 \times 2} = 561$$

$$58\,905 - 561 = 58344$$

Dans ces conditions il y a 58344 possibilités.

### **III) Propriétés des nombres de combinaison**

#### **1) Propriété 1**

**Pour tout entier naturel  $n$ ,  $n \geq 0$ ,  $\binom{n}{0} = 1$  et  $\binom{n}{n} = 1$**

**Justification :**

Dans un arbre, un seul chemin conduit à 0 succès lors de  $n$  répétitions c'est  $\bar{S}\bar{S} \dots \bar{S}$  donc

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \text{ car } 0! = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(0-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \text{ car } 0! = 1$$

#### **2) Propriété 2**

**Pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n$   $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$**

**Justification :**

Si  $n = 0$ ,  $0 \leq p \leq n$  donne  $p = 0$ , la propriété est vérifiée grâce à la convention donnée dans la définition plus haut.

Si  $n > 0$ , alors sur l'arbre représentant le schéma de  $n$  épreuves de Bernoulli  $\binom{n}{p}$  est le nombre de chemins réalisant  $p$  succès donc aussi  $n - p$  échecs.

Par ailleurs,  $\binom{n}{n-p}$  est le nombre de chemins réalisant  $n - p$  succès.

Par symétrie de l'arbre, on a donc  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

#### **3) Propriété 3**

**Pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n - 1$**

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

### Justification :

$\binom{n}{p}$  est le nombre de chemins réalisant  $p$  succès dans un schéma de Bernoulli à  $n$  répétitions.

Ces  $p$  succès sont obtenus :

- d'une part en réalisant  $p - 1$  succès lors des  $n - 1$  premières épreuves suivis d'un succès lors de la dernière épreuve ce qui représente  $\binom{n-1}{p-1} \times 1$  chemins dans l'arbre.
- D'autre part en réalisant  $p$  succès lors des  $n - 1$  premières épreuves ce qui représente  $\binom{n-1}{p}$  chemins dans l'arbre.

$$\text{D'où } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

### Remarque importante :

Ces trois propriétés permettent de calculer les valeurs de  $\binom{n}{p}$  pour tout entier naturel  $n$   $n \geq 0$  et pour tout  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$

### Exemple

Calculer  $\binom{5}{3}$

$$\begin{aligned} \binom{5}{3} &= \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} && \text{propriété 3} \\ &= \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + 1 && \text{propriété 2 et propriété 1} \\ &= 3 \times \binom{3}{2} + 1 = 3 \times \binom{2}{1} + 3 \times \binom{2}{2} + 1 && \text{propriété 3} \\ &= 3 \times \binom{1}{0} + 3 \times \binom{1}{1} + 3 + 1 && \text{propriété 3 et propriété 1} \\ &= 3 + 3 + 3 + 1 = 10 && \text{propriété 1} \end{aligned}$$

**On comprend que ces calculs peuvent devenir fastidieux, c'est pourquoi on se servira du résultat établi par Blaise Pascal dans le triangle suivant :**

## IV) Triangle de Pascal

Ce tableau triangulaire donne la valeur des  $\binom{n}{p}$  pour tout entier naturel  $n$   $n \geq 0$  et pour tout  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$  à l'intersection de la ligne portant la valeur de  $n$  et de la colonne portant la valeur de  $p$ .

**Remarque :**

Ce tableau peut être poursuivi pour toutes valeurs de  $n$  et de  $p$

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 | 7 |
|------------------|---|---|----|----|----|----|---|---|
| 0                | 1 |   |    |    |    |    |   |   |
| 1                | 1 | 1 |    |    |    |    |   |   |
| 2                | 1 | 2 | 1  |    |    |    |   |   |
| 3                | 1 | 3 | 3  | 1  |    |    |   |   |
| 4                | 1 | 4 | 6  | 4  | 1  |    |   |   |
| 5                | 1 | 5 | 10 | 10 | 5  | 1  |   |   |
| 6                | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6  | 1 |   |
| 7                | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

**Propriété 1**

**Propriété 3**  
 $6 + 4 = 10$

Valeur de  $\binom{6}{4}$

**Propriété 1**

La propriété 2 est illustrée par la symétrie existant sur chacune des lignes du tableau