Dénombrement

I) Dénombrement

1) Définition :

Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments de E est appelé cardinal de l'ensemble et il est noté card(E).

Exemple :
L'ensemble $E = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ est un ensemble fini et card $(E) = 5$
L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas un ensemble fini.

2) Eléments disjoints

Définition :

A et B sont deux parties disjointes si elles n'ont aucun élément en commun

II) Principe additif :

• **E_1 et E_2 sont deux parties disjointes d'un ensemble E constituées respectivement de m et n éléments alors le nombre d'éléments de $E_1 \cup E_2$ est $n + m$**

• **Plus généralement si E_1, E_2,..., E_p sont des éléments finis deux à deux disjoints d'un ensemble E et p un entier naturel non nul alors card $(E_1 + E_2 +...+ E_p)$= card(E_1)+card(E_2) +....+ card(E_n)**

Exemples :

Exemple 1 : $E_1 = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ et $E_2 = \{2; 4; 6; 8; \}$ E=$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; \}$

E_1 et E_2 sont deux parties disjointes de l'ensemble E

Card$(E_1) = 5$ (E_1 est formé de 5 éléments) et

Card$(E_2) = 4$ (E_2 est formé de 4 éléments)

Card$(E_1 \cup E_2) = 5 + 4 = 9$

Exemple 2 : Dans une classe de terminale de 35 élèves :

15 élèves ont pris l'espagnol en LV2 : E_1

10 élèves ont pris l'italien en LV2 : E_2

8 élèves ont pris l'allemand en LV2 : E_3

2 élèves a pris le chinois en LV2 : E_4

1 élève a pris le russe en LV2 : E_5

Les ensembles E_1 ; E_2 ; E_3 ; E_4 et E_5 sont deux à deux disjoints

card $(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5)$= card (E_1)+card(E_2)+card(E_3)+ card(E_4)+ card(E_5)=
15+10+8+2+1=36 donc card $(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5)$= 36

III) Principe multiplicatif

1) Définition :

Le produit cartésien de deux ensembles finis E et F, noté E×F, est l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ où x est un élément de E et y un élément de F.

Plus généralement si E_1, E_2,..., E_p sont des ensembles finis et p un entier naturel non nul alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est l'ensemble des p-uplets ($a_1\,;\,a_2;\dots;a_p$) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ ... $a_p \in E_p$.

$E = \{1;2;3\}$ et $F = \{a;b\}$ alors $E \times F = \{(1;a);(2;a);(3;a);(1;b);(2;b);(3;b)\}$

On peut représenter ce produit cartésien par le tableau :

E \ F	a	b
1	(1 ; a)	(1 ; b)
2	(2 ; a)	(2 ; b)
3	(3 ; a)	(3 ; b)

2) Principe multiplicatif

E et F sont deux ensembles finis constitués respectivement de m et n éléments alors E × F est un ensemble fini dont le nombre d'éléments est le produit $n \times m$.

Plus généralement si E_1, E_2,..., E_p sont des ensembles finis et p un entier naturel non nul alors $card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times \dots\dots \times card(E_p)$

Exemples :

Exemple 1 : $E = \{1;2;3\}$ et $F = \{a;b\}$

card E =3 et card F =2 donc card $E \times F = 3 \times 2 = 6$

En effet, nous retrouvons ce résultat en regardant le tableau ci-dessous.

De plus card E =3 et card F =2 donc card $E \times F = 3 \times 2 = 6$

En effet, nous retrouvons ce résultat en regardant le tableau dans l'exemple du paragraphe précédent.

Exemple 2 : Un restaurant propose sur sa carte des menus 3 entrées 5 plats de résistance et 4 desserts.

a. Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat de résistance et d'un dessert peut-on composer ?
b. Même question si le dessert est un tiramisu.

Réponse :

a. Notons E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.

D'après le principe multiplicatif on a :

$card(E \times P \times D) = card(E) \times card(P) \times card(D) = 3 \times 5 \times 4 = 60$

On peut ainsi composer 60 menus différents.

b. Le dessert est le tiramisu, donc $card(E \times P) = card(E) \times card(P) = 3 \times 5 = 15$

IV) Ensemble des p-uplets (ou p-listes) d'un ensemble fini E

1) Définition

E est un ensemble fini à n éléments, p est un nombre entier naturel non nul.

Un p-uplets d'éléments de E est une liste ordonnée de p éléments de E distincts ou confondus.

L'ensemble de tous les p-uplets de E est l'ensemble $\underbrace{E \times E \times E \times \ldots\ldots \times E}_{p \text{ fois}}$ et on le note E^p

De plus card(E^p)=n^p

Exemples :

E=$\{a; b; c\}$

Par exemple : (a ; a ; a) ; (a ; b ;a) ; (a ; c ; a) ; (a ; a ;b) (a ; a ; c) ; (a ;b ;c)….. sont des triplets différents de E^3.

Le nombre de triplets différents de E^3 est 3^3 c'est-à-dire 27.