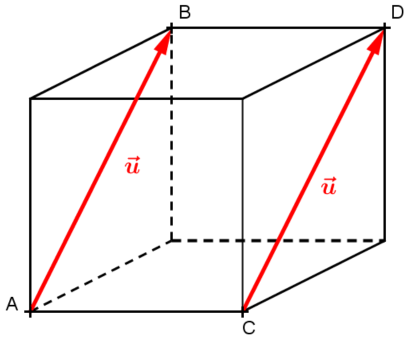
Vecteurs, droites et plans de l'espace

I) Vecteurs de l'espace

1) Définitions

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.



A et B sont deux points de l'espace distincts.

La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

• Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour direction celle de la droite (AB)

• Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour sens celui de A vers B

• Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour norme la longueur ou norme la distance AB. On note $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

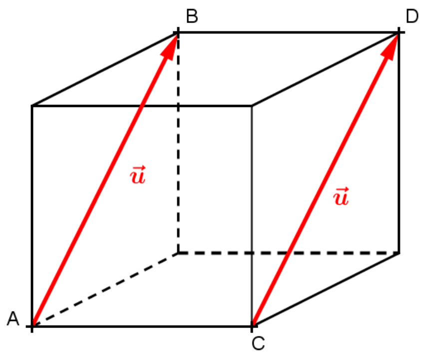
Lorsque $A = B$ le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul noté : $\vec{0}$

2) Egalité de deux vecteurs

• Lorsque la translation qui transforme A en B transforme également C en D on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.
Dans ce cas $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les représentants d'un même vecteur $\vec{u}$ et on note : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

• Deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu'ils ont :
La même direction, le même sens et la même longueur.



3) Propriétés

a) Propriété 1 :

Pour tout point A de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point C tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

b) Propriété 2 :

Les opérations sur les vecteurs de l'espace sont les mêmes que celles sur les vecteurs du plan.

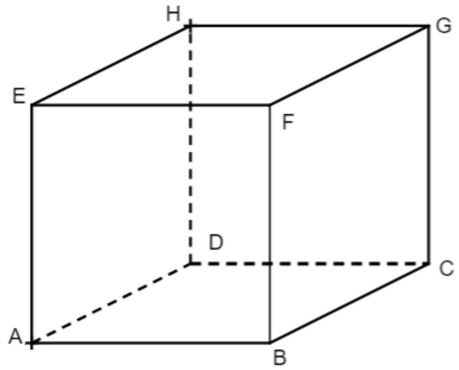
4) Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition :

Dire qu'un vecteur $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ signifie qu'il existe des réels x , y et z tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} + z\vec{t}$

Exemple :

ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{HB}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{HD}$; $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$:



$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}$

Or $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$ donc

$\boldsymbol{\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HG}}$

On a bien $\overrightarrow{HB} = x\overrightarrow{HE} + y\overrightarrow{HD} + z\overrightarrow{HG}$

Avec $x = 1$; $y = 1$ et $z = 1$

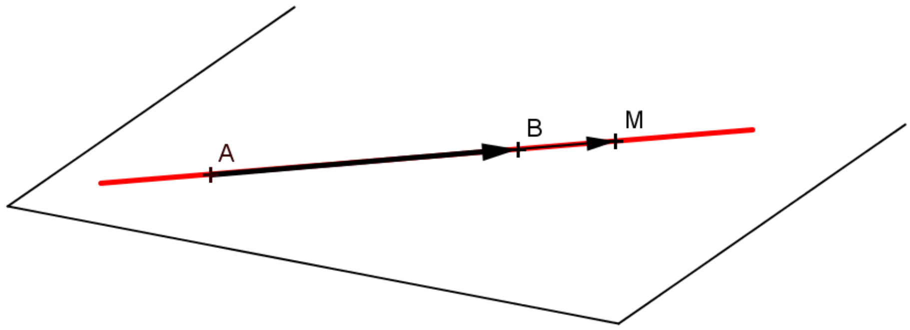
II) Caractérisation d'une droite de l'espace

1) La droite

a) Définition

A et B sont deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble des points M tel que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, k étant un nombre réel quelconque.



b) Propriété

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$
Dire que trois points distincts A, B et C distincts sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc à dire qu'il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$

Remarque : Une droite peut être définie de deux façons équivalentes : par la donnée de deux points A et B non confondus ou par la donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul.

2) Positions relatives de deux droites de l'espace

• Deux droites sont dites « coplanaires » si elles sont contenues dans un même plan.

• Dans le cas contraire, elles sont dites « non coplanaires ».

Remarques :

Deux droites coplanaires peuvent être sécantes ou parallèles.

Deux droites non coplanaires n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles.

Deux droites parallèles sont coplanaires.

Deux droites sécantes sont coplanaires.

Exemple :

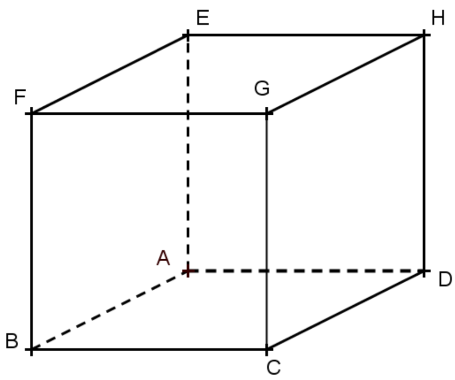
Ci-contre est tracé le cube ABCDEFGH

Les droites (FG) et (EH) sont coplanaires et parallèles

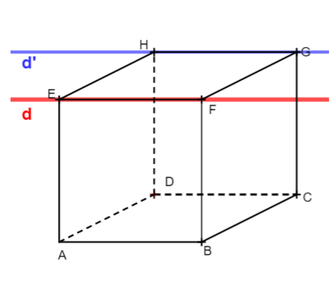
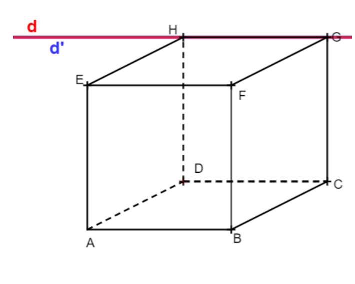
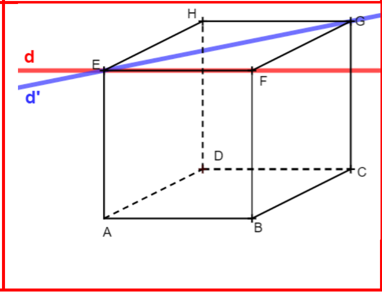
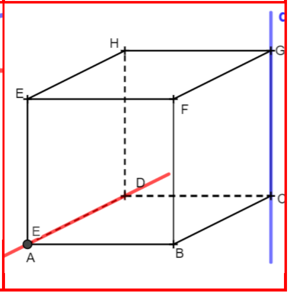
Les droites (DH) et (CD) sont coplanaires et sécantes en D

Les droites (AD) et (EF) sont non coplanaires

Les droites (BC) et (EH) sont parallèles donc coplanaires.



d et d’ sont deux droites de l’espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

<table>
<tr><th colspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires</th><th colspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires</th></tr>
<tr><td>d et d’ sont coplanaires et strictement parallèles</td><td>d et d’ sont coplanaires et confondues</td><td>d et d’ sont coplanaires et sécantes</td><td>d et d’ sont non coplanaires : aucun plan ne contient d et d’</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Propriétés

• d est une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
M appartient à la droite d si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. C’est-à-dire il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.

• Trois points A, B et C de l’espace sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

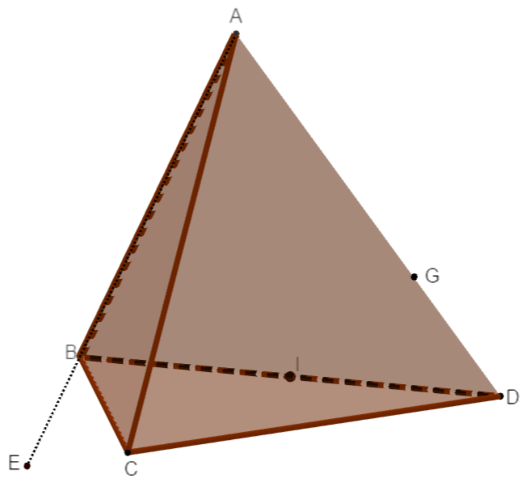
• Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple :

ABCD est un tétraèdre de l’espace. I est le milieu de l’arête [BD], le point G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

a. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

b. En déduire que les points I, G et E sont alignés



Correction :

a. On utilise la relation de Chasles : $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{GE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DI}$ or, $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

donc $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$ Or $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$donc

$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b. $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = 3(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = 3\overrightarrow{GI}$

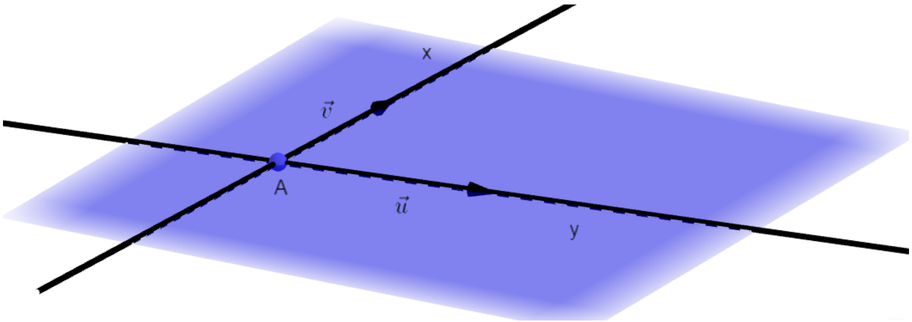
$\overrightarrow{GE} = 3\overrightarrow{GI}$, les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires, les points I, G et E sont alignés.

III) Caractérisation d'un plan de l'espace

1) Notation et vocabulaire

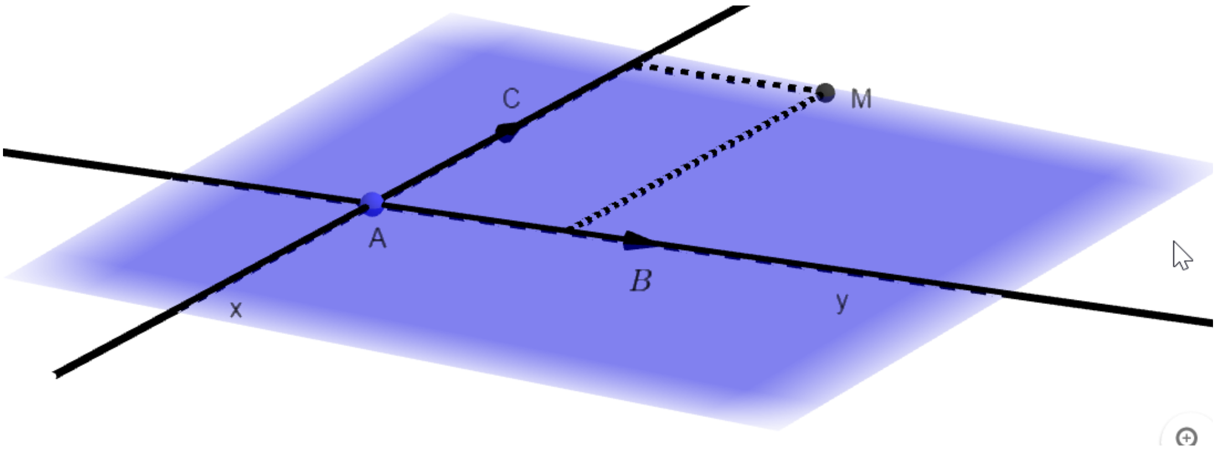
Un plan de l'espace peut être défini par la donnée de deux droites sécantes.
Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires définissent un plan.

On note ce plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On dit que $(\vec{u}$, $\vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan qui définit sa direction



2) propriété

A, B et C sont trois points non alignés.
Le plan (A, B, C) est l'ensemble des points M définis par :
$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$
x et y étant deux nombres quelconques.



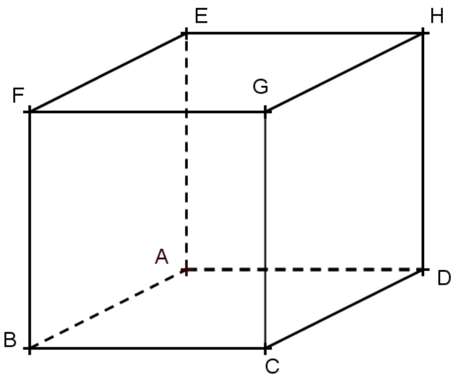
3) Vecteurs coplanaires

Définition :

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des nombres réels a et b tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Exemples :

Pour le cube dessiné ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$ et les points A,E, F et B sont coplanaires.



Les droites (EF) et (CH) ne sont pas coplanaires mais les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$

Remarque : Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

4) Positions relatives de droites et plans de l'espace

a. Position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace

L'intersection d'une droite (d) et d'un plan(P) est caractérisée par le nombre de points de celle-ci et trois cas sont envisageables :

- **L'intersection contient au moins deux points et alors la droite (d) est contenue dans le plan (P) ;**
- **L'intersection est un point unique alors la droite (d) est dite sécante au plan (P) ;**
- **L'intersection est vide alors la droite (d) est dite parallèle au plan (P) et non incluse dans (P).**

b. Propriétés de parallélisme d'une droite et d'un plan

1) Une droite est parallèle à un plan si elle est contenue dans le plan ou si elle ne rencontre pas le plan.

2) Une droite est parallèle à un plan, si et seulement si, elle est parallèle à une droite de ce plan

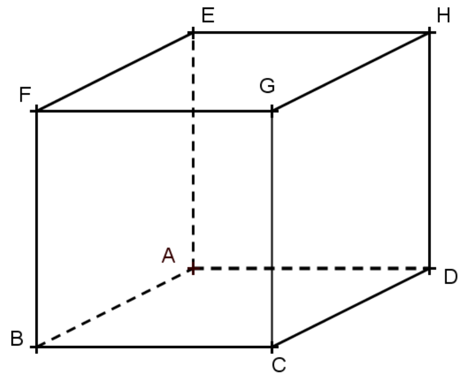
Exemples :

Ci-contre est tracé le cube ABCDEFGH

La droite (EG) est contenue dans le plan (EHG)

La droite (AD) est parallèle au plan (EGH)

La droite (GC) est sécante au plan (ABD) en C



c. Position relative de deux plans dans l'espace

L'intersection de deux plans (P) et (Q) est caractérisée par le nombre de points qu'elle contient et trois cas sont envisageables :

- **L'intersection contient au moins trois points non alignés, les plans sont alors confondus ;**
- **L'intersection est une droite, les plans sont dits sécants selon cette droite ;**
- **L'intersection est vide et les deux plans sont dits parallèles, non confondus.**

d. Propriétés

- **Deux plans sont parallèles, si et seulement si, deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.**

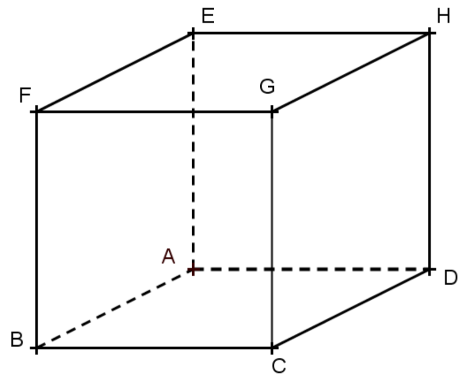
- **Si une droite (d) est parallèle à un plan (P) alors tout plan contenant cette droite (d) et sécant au plan (P) coupe le plan (P) selon une droite parallèle à (d).**

Exemples :

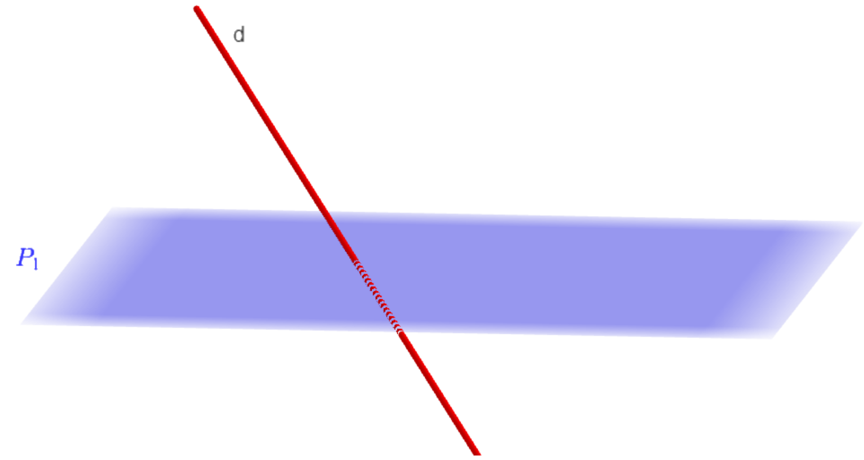
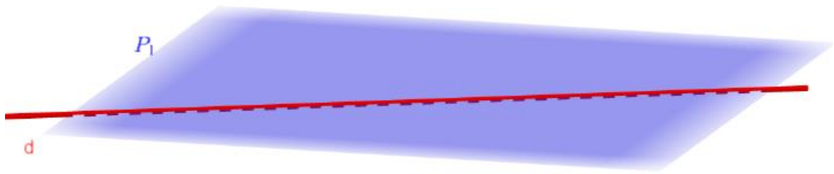
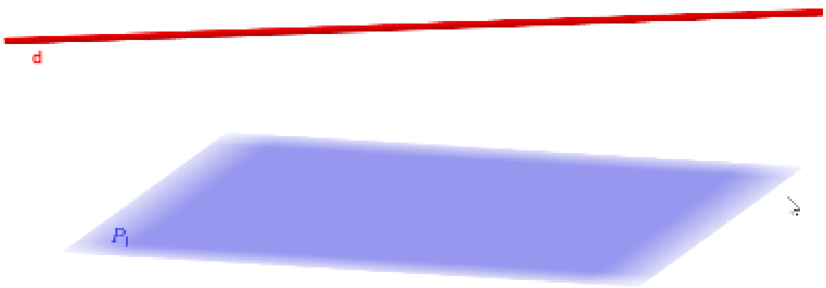
Ci-contre est tracé le cube ABCDEFGH

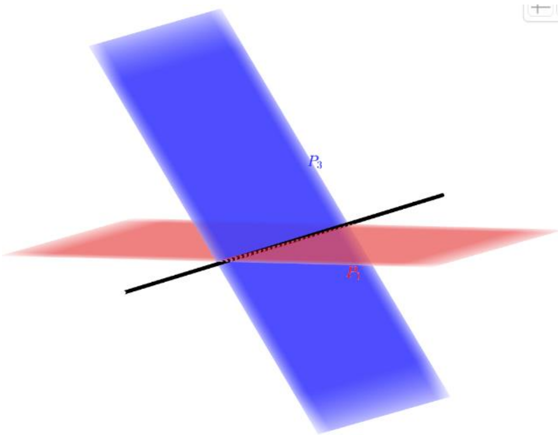
Les plans (EGH) et (ADE) sont sécants selon la droite (EH)

Les plans (AEF) et (GHD) sont parallèles non confondus.



e. Résumé positions relatives de droites et plans de l’espace

Position relatives de droite et plan	
	**La droite d et le plan P_1 sont sécants.**
	**La droite d est incluse dans P1.**
	**La droite d et le plan P1 sont strictement parallèles.**

Position relatives de plans	
	**Les deux plans P$_1$ et P$_3$ sont sécants suivant une droite d.** **La droite est l'intersection des deux plans.**
	**Les deux plans P$_1$ et P$_2$ sont parallèles.**
	**Les deux plans P$_1$ et P$_2$ sont confondus.**

IV) Bases et repères de l'espace

1) Base de l'espace

Une base de l'espace est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ formé de vecteurs non coplanaires.

2) Propriété et définition

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{t}$ il existe un unique triplet de nombres réels $(a\,;b\,;c)$ tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

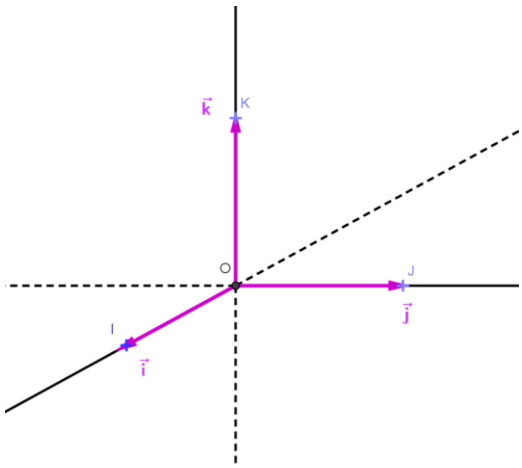
Le vecteur $\vec{t}$ a pour coordonnées $(a\,;b\,;c)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

3) Repère de l'espace

Définition

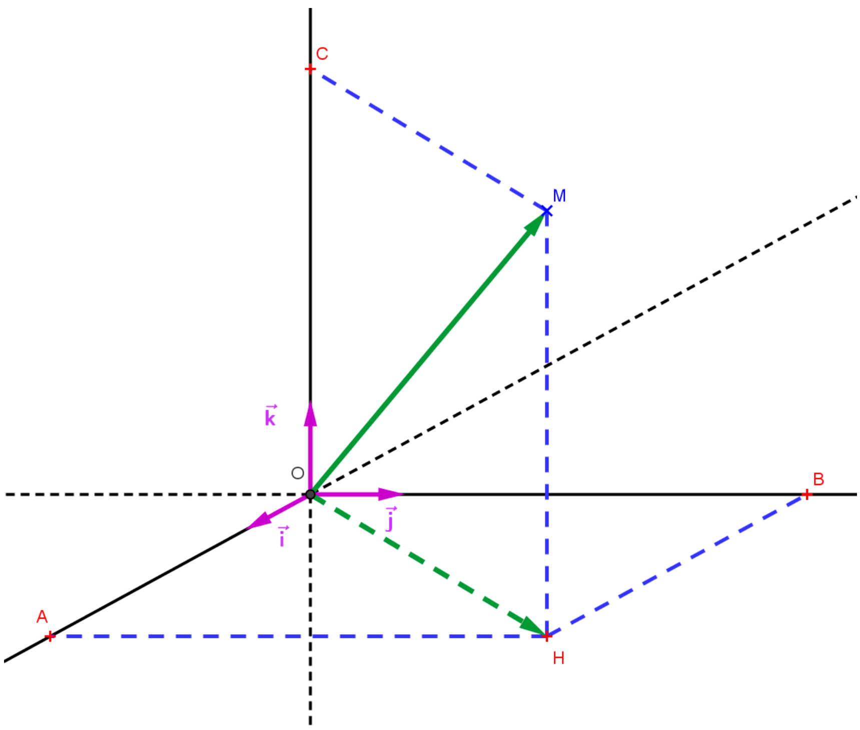
Un repère de l'espace noté (O ; $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) est formé d'un point O et d'une base ($\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) de vecteurs de l'espace.

Remarque : On note aussi le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ où $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ sont des vecteurs non coplanaires. Si de plus ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de longueurs unité on dit que le repère est orthonormal.



4) Propriété

(O; $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que
$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère (O; $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) où x s'appelle l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote du point M.



Sur La figure ci-contre on a :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OC}$ avec $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Mais $\overrightarrow{OA} = x\vec{\imath}$; $\overrightarrow{OB} = y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OC} = z\vec{k}$ (x, y, z) réels

$\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ étant respectivement colinéaires à $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

De là, $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

5) Coordonnées formules

Dans un repère de l'espace (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$):

• Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,;\,y\,;\,z)$ et $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ alors :

- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\,;\,y + y'\,;\,z + z')$

- Pour tout réel λ , le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées$(\lambda x\,;\lambda y\,;\,\lambda z)$

• Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points dans un repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) alors :

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ dans la base($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

Le milieu I du segment AB a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\,;\frac{z_A + z_B}{2}\right)$

La longueur AB est : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

V) Exemples d'exercices de base :

a. Exemple 1 : Dans un repère de l'espace on donne les points :

$A(-2\,;1\,;0)$ $B(1\,;3\,;5)$ et $C(15\,;20\,;25)$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Le point C appartient-il à la droite (AB) ?
3. Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$
4. Calculer la longueur AB

Réponses :

1. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\,;\,z_B - z_A)$ donc $\overrightarrow{AB}(1 - (-2)\,;\,3 - 1\,;\,5 - 0)$ donc $\overrightarrow{AB}(3\,;2\,;5)$
   $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,;\,y_C - y_A\,;z_C - z_A)$ donc $\overrightarrow{AC}(15 - (-2);\,20 - 1\,;\,25 - 0)$ donc $\overrightarrow{AC}(17\,;19\,;25)$

2. Le point C appartient à la droite (AB) si et, seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Or, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si, il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k = \frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$
   Or , $\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{17}{3}$ et $\frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{19}{2}$ donc $\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}}$ il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
   Donc le point C n'appartient pas à la droite (AB)

3. Le point I milieu de [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\,;\frac{z_A + z_B}{2}\right)$

   $I\left(\frac{((-2) + 1}{2}\,;\frac{1 + 3}{2}\,;\frac{0 + 5}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{-1}{2}\,;\frac{4}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$ donc $I\left(-\frac{1}{2}\,;2\,;\frac{5}{2}\right)$

4. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38}$

b. Exemple 2 : Dans une base de l'espace, on donne les vecteurs $\vec{u}(2;-4;0)$, $\vec{v}(6;2;6)$ et $\vec{w}(-2;-10;-6)$

1. Calculer les coordonnées du vecteur $2\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}$
2. En déduire que les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ sont coplanaires

Correction :

1. $2\vec{u}=(4;-8;0)$ donc

   $2\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=(4-6-(-2);\ -8-2—(-10);0-6-(-6))=(0\,;0\,;0)$

   Donc $2\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$

2. Comme $2\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$ alors $\vec{v}=2\vec{u}-\vec{w}$

   Il existe donc $y=1$deux nombres réels a et b tels que $\vec{v}=a\vec{u}+b\vec{w}$ avec $a=2$ et $b=-1$

3. Ce qui prouve que les vecteurs$\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ sont coplanaires

c. Exemple 3 : Dans un repère de l'espace on donne les points :

A(1 ;–1 ; 2) B(0 ; 3 ;–4) et les vecteurs $\vec{u}(1;0;1)$, $\vec{v}(0\,;3\,;5)$, $\vec{w}(1;3;6)$ et $\vec{t}(2;-3;-3)$

On note $\mathcal{P}_1$ le plan $(A\,;\,\vec{u}\,;\vec{v})$ et $\mathcal{P}_2$ le plan $(B\,;\vec{w}\,,\vec{t})$ et d'une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

1. Démontrer que la droite d est parallèle à $\mathcal{P}_1$.
2. Le point B appartient-il au plan $\mathcal{P}_1$?
3. Déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Correction :

1. $\vec{w}(1;3;6)$ vecteur directeur de d et $\mathcal{P}_1$ le plan $(A\,;\,\vec{u}\,;\vec{v})$
   sont parallèles s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$
   $\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}$ on obtient le système : $\begin{cases}x=1\\3y=3\\x+5y=6\end{cases}$ on obtient $x=1$ et $y=1$

Donc il existe bien deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$ avec $x=1$ et $y=1$ donc la droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}_1$.

2. $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ donc $\overrightarrow{AB}(0-1);3-(-1);-4-2)$ donc $\overrightarrow{AB}(-1\,;\,4\,;-6)$

   Le point B appartient au plan $\mathcal{P}_1$**,** s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AB}=x\vec{u}+y\vec{v}$

$\begin{pmatrix}-1\\4\\-6\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}$ on obtient le système : $\begin{cases}x=-1\\3y=4\\x+5y=-6\end{cases}$ donc de la première ligne on

obtient $x=-1$ et $y=\frac{4}{3}$ mais si on remplace les valeurs de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ dans la troisième ligne $-1+5\times\frac{4}{3}\neq-6$ **.** Donc il n'existe pas de réels x et y tels que$\overrightarrow{AB}=x\vec{u}+y\vec{v}$ donc B n'appartient pas au plan $\mathcal{P}_1$.

3. $\mathcal{P}_1$ $(A\,;\,\vec{u}\,;\vec{v})$ et $\mathcal{P}_2$ $(B\,;\vec{w}\,,\vec{t})$ $\vec{u}(1;0;1)$, $\vec{v}(0\,;3\,;5)$, $\vec{w}(1;3;6)$

   Nous avons montré au 1. que $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

   Maintenant cherchons, s'il existe deux réels x et y ,tels que $\vec{t}=x\vec{u}+y\vec{v}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ on obtient le système : $\begin{cases} x = 2 \\ 3y = -3 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$

De la première ligne on a $x = 2$, de la deuxième ligne on a $y = -1$ et on remplaçant les valeurs de x et y dans la troisième ligne on obtient bien $x + 5y = -3$

Il existe bien deux réels x et y ,tels que $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec $x = 2$ et $y = -1$

En conclusion :

Nous avons $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ donc les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

De plus $\vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v}$ donc les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires.

Donc $(\vec{u}\,;\vec{v})$ et $(\vec{w}\,,\vec{t})$ sont coplanaires donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.