Calcul d'une intégrale

I) Rappel des formules des primitives d'une fonction

a. Primitives des fonctions usuelles : soit C un réel quelconque :

f est définie sur I par $f(x) =$	Les primitives de f sur I sont définies par : $F(x) =$	L'intervalle $I =$
k	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \geq 1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$ln(x) + C$	$]0\,;+\infty[$
$sin(x)$	$-cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$

b. Primitives et opérations sur les fonctions :

Propriétés de linéarité :

Soit F et G des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :

- **$F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I ;**
- **Pour tout réel k, kF est une primitive de la fonction kf sur I.**

Exemples :

- Les primitives de $f(x) = 3x^2$ sont $F(x) = 3\frac{x^3}{3} + k = x^3 + k$, $k \in \mathbb{R}$
- Les primitives de $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2x$ sont sur $]\,0\,;\,+\infty[$:

  $F(x) = \frac{3}{x} + 5\ln(x) - x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$

Primitives et composées de fonctions

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Primitives de f sur I	Condition sur u
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	Aucune condition particulière
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$ln(u)+C$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	$e^u + C$	Aucune condition particulière

Exemples :

Pour chaque fonction f, déterminer ses primitives et en déduire une primitive sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$; $I = \mathbb{R}$; b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]1 ; +\infty[$.

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; I = $]2 ; +\infty[$; d) $f(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$; I = $]0 ; +\infty[$.

Réponses :

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$ en utilisant la formule $\boldsymbol{u'u^n}$ avec $u(x) = x^3 - 1$ et $u'(x) = 3x^2$ on obtient : $f(x) = \frac{3x^2(x^3-1)^5}{3} + C$

$F(x) = \frac{1}{3\times 6}(x^3 - 1)^6 + C$ $\boldsymbol{F(x) = = \frac{1}{18}(x^3 - 1)^6 + C}$

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ en utilisant la formule $\boldsymbol{\frac{u'}{\sqrt{u}}}$ avec $u(x) = x^2 - 1$ $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ on obtient :

$F(x) = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{x^2 - 1} + C$ $\boldsymbol{F(x) = 3\sqrt{x^2 - 1} + C}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ en utilisant la formule $\boldsymbol{\frac{u'}{u}}$ avec $u(x) = x^2 - 4$ et $u'(x) = 2x$

$f(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-4}$ on obtient :

$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4) + C}$

d) $f(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ en utilisant la formule $\boldsymbol{u'e^u}$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $u(x) = -\frac{1}{x^2}$ on obtient :

$\boldsymbol{F(x) = e^{\frac{1}{x}} + C}$

II) Primitive d'une fonction continue :

1) Théorème :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a est un réel de l'intervalle I alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Exemples :

Exemple 1 : Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$.

Déterminer le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.

Réponse :

D'après ce qui précède F est l'unique primitive de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ qui s 'annule en $x = 0$

Donc $F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et $F'(0) = 0$ donc $F'(x) \geq 0$ sur ℝ et de ce fait F est strictement croissante sur ℝ

Exemple 2 : Soit F la fonction définie sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,d\,t$

Déterminer le sens de variation de F sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$

Réponse :

F est l'unique primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ qui s 'annule en $x = 1$

Donc $F'(x) = \frac{1}{x}$ et $F'(1) = 0$ donc $F'(x) \geq 0$ sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ et de ce fait

F est strictement croissante sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$

Remarque $F\,(x) = ln(x)$

Preuve :

Cas où f est une fonction continue et croissante sur I.

Soit x_0 un réel de I et soit h tel que $x_0 + h$ appartienne à I.

On a $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(x)dx$ **–** $\int_a^{x_0} f(x)dx$

$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(x)dx$ **+** $\int_{x_0}^{a} f(x)dx$

D'après la relation de Chasles on a $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$

• Si $h > 0$, la fonction f étant croissante, pour tout $x \in [x_0\,;\,x_0 + h]$, on a :

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + h)$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

• Si $h < 0$, la fonction f étant croissante, pour tout $x \in [x_0\,;\,x_0 + h]$, on a :

$$f(x_0 + h) \leq f(x) \leq f(x_0)$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

La fonction f est continue en x_0 donc

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Donc la fonction F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Donc F est dérivable sur I et $F' = f$. ***F* est une primitive de *f* sur *I*.**

On a $F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$. **$F$ est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a.**

On peut faire une démonstration équivalente lorsque f est continue et décroissante sur I

III) Intégrales et primitives :

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I.
Soit F une primitive de f sur I. On a $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemples :

Exemple 1 : Calculer $I = \int_1^3 x^3 dx$

Réponse :

$I = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$

Exemple 2 : Calculer $J = \int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)\, dx$

Réponse :

On calcule la primitive de $\frac{1}{x}\ln(x)$

on a $u'(x) \times u(x)$ avec $u(x) = \ln(x)$ dont la primitive est $\frac{u^2(x)}{2}$ soit $\frac{ln^2(x)}{2}$

$F(e) = \frac{ln^2(e)}{2} = \frac{1}{2}$ et $F(1) = \frac{ln^2(1)}{2} = 0$

$J = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^e = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ donc $J = \frac{1}{2}$

Démonstration de la propriété :

Soient F la primitive de f qui s'annule en a, on a $\int_a^b f(x)dx = F(b)$
Or $F(a) = 0$ donc $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Si G est une autre primitive de f alors il existe un réel k tel que :

$G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Donc $G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$.

Donc on a aussi $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.