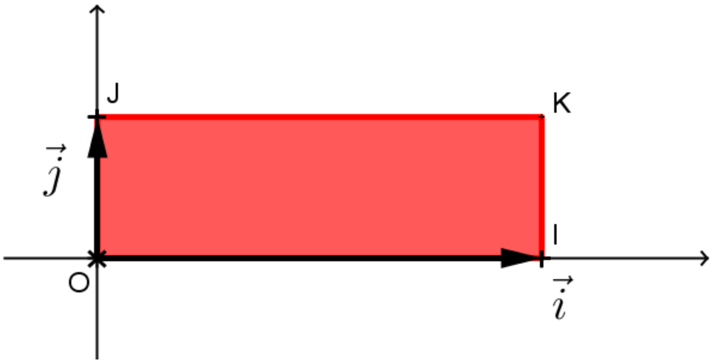
Intégrale : Interprétation géométrique et propriétés.

I) Intégrale et valeur moyenne :

1) Unité d'aire :

Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthogonal. Soit I, J et K les points de coordonnées respectives (1 ; 0) , (0 ; 1) et (1 ; 1).

L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIJK.



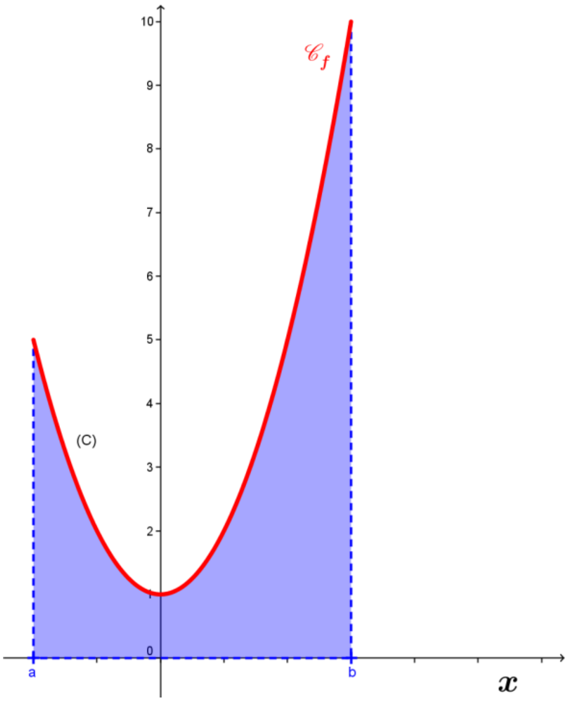
2) Intégrale d'une fonction positive :

a. Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$. On note (C) sa courbe dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\int_a^b f(x)dx$, est l'aire du domaine situé sous la courbe (C) , c'est à dire l'aire de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



Remarque :

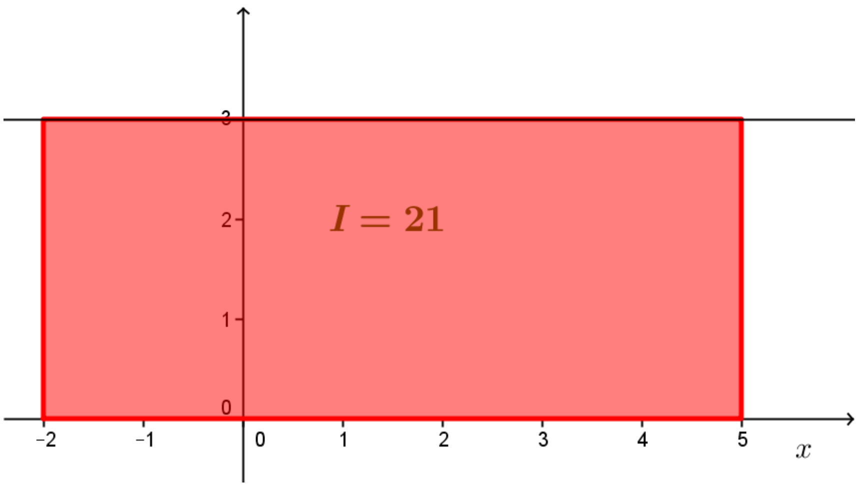
La variable x est dite muette, elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

b. Exemples :

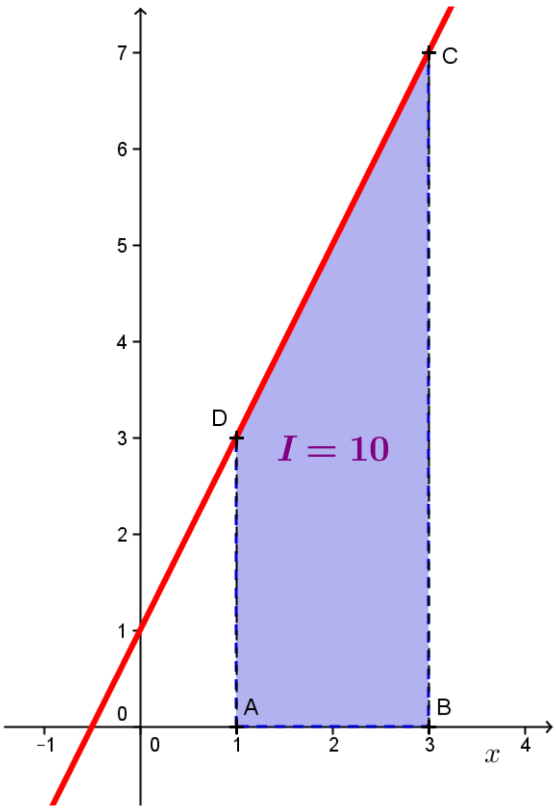
• Fonction constante :

Soit f définie par $f(x) = 3$ sur $[-2\,;\,5]$. On a $\int_{-2}^{5} f(x)dx = 3\times7 = 21$ unités d'aire.



• Fonction affine :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t + 1$. On a $\int_1^3 f(t)dt = 10$ unités d'aires.
Cette intégrale représente l'aire du trapèze ABCD ci-dessous :



• Fonction en escalier :

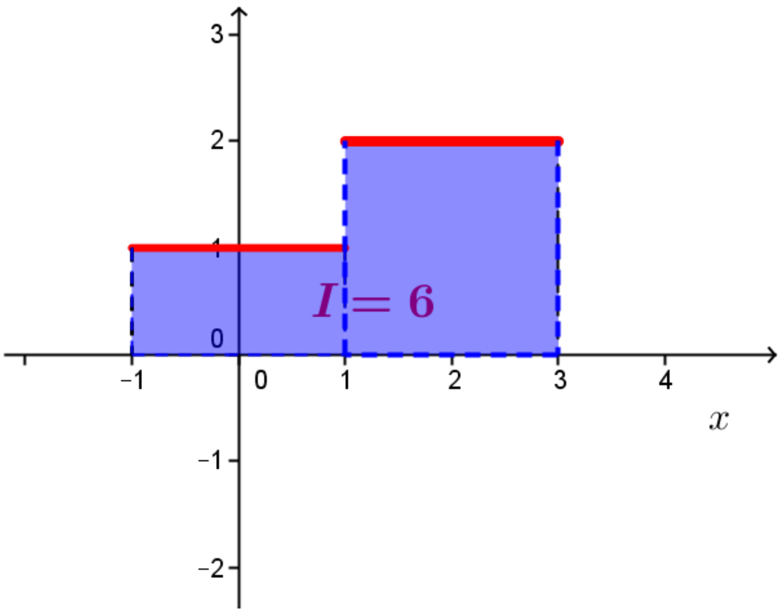
Soit f la fonction définie sur $[-1\,;\,3]$ par :

$$f\,(x) \;=\; \begin{cases} 1\ si\ -1 \leq x \leq 1 \\ 2\ si\ 1\ \leq x\ \leq 3 \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue sur $[-1\,;\,3]$

On définit néanmoins l'intégrale de −1 à 3 de f comme l'aire (en unités d'aire) du domaine situé sous la courbe, on la note encore $\int_{-3}^{1} f(x)dx$

Et on a $\int_{-3}^{1} f(x)dx \;=\; 2\,+\,4\;=\;6$ en unités d'aire (somme des aires des deux rectangles coloriés ci-dessous)



3) Intégrale d'une fonction quelconque :

a) Intégrale d'une fonction continue et négative sur [a ; b].

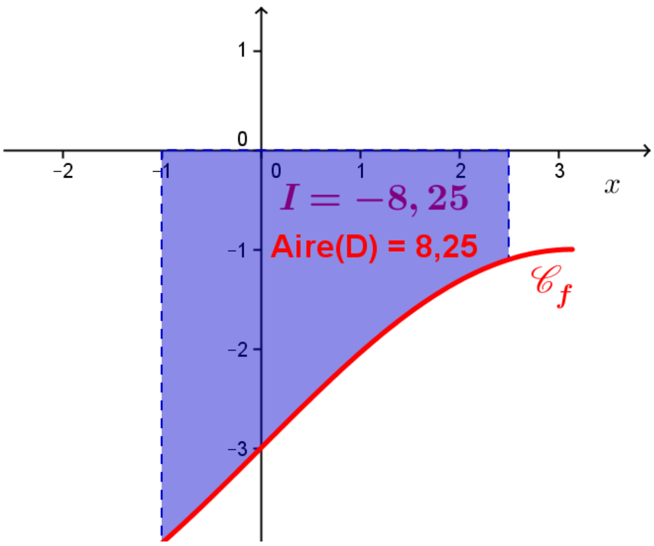
Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
On note D le domaine compris entre (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'intégrale de a à b de f est l'opposée de l'aire du domaine D.

On note $\int_a^b f(x)dx = -Aire(D)$.

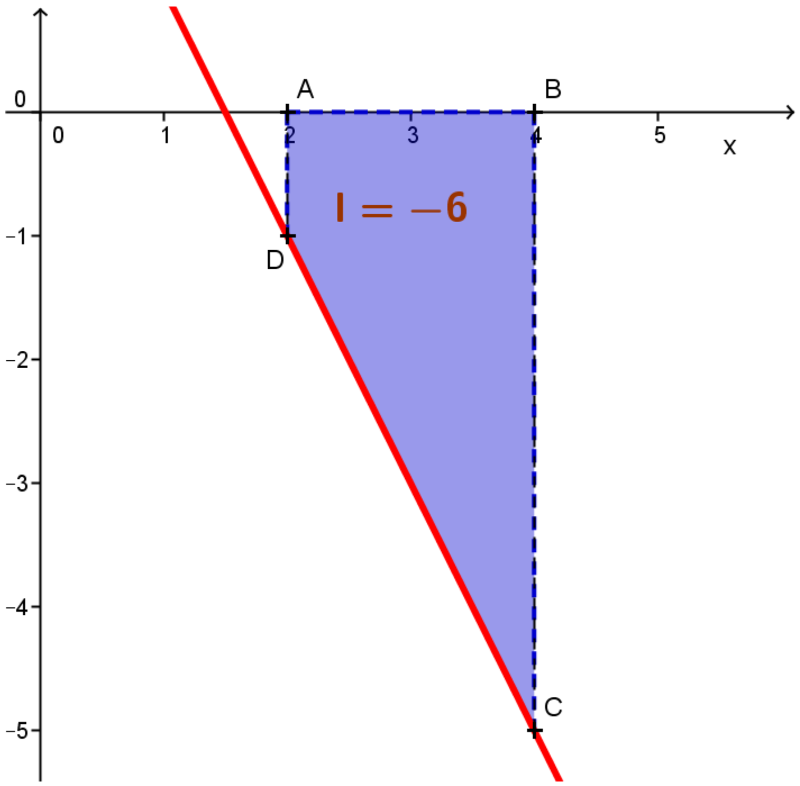
Remarque :
On dit parfois que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique du domaine D.

Exemple1 :
Sur la figure ci-dessous on a $\int_{-1}^{2.5} f(x)dx$ =−8,25 et l'aire du domaine est Aire(D)= 8,25 unités d'aire



Exemple2 :

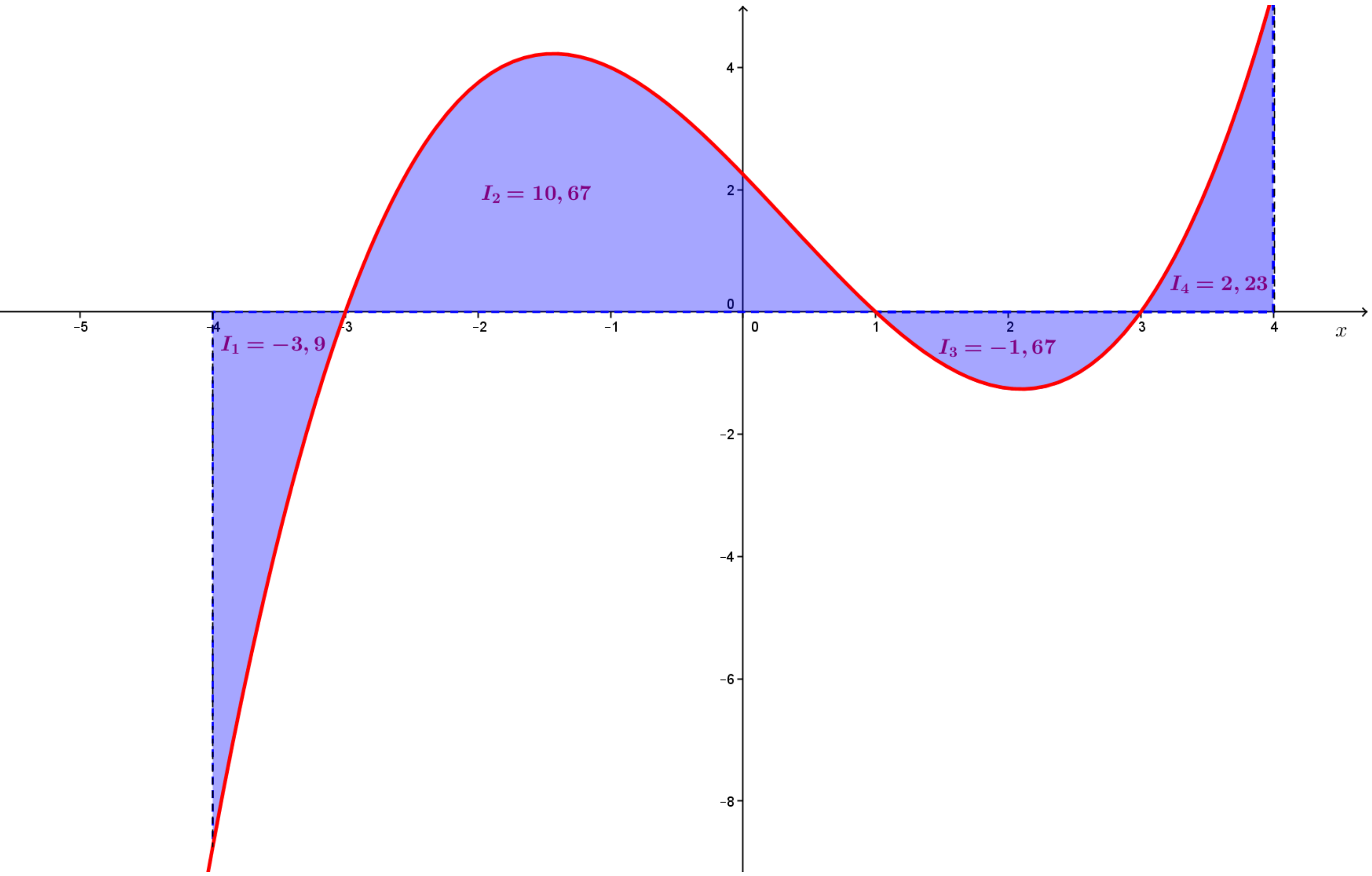
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -2t + 3$. On a $\int_2^4 f(x)dx = -6$ unités d'aires.
Cette intégrale représente l'opposé de l'aire du trapèze ABCD ci-dessous :



b) Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur [a ; b].

Pour une fonction continue et de signe quelconque sur $[a\,;\,b]$, on convient que l'intégrale de a à b de f est la somme des aires algébriques des domaines définis à partir des intervalles sur lesquels $f(x)$ est de signe constant.

Exemple 1 :



Sur la figure ci-dessus est représentée la courbe de la fonction f et on a :

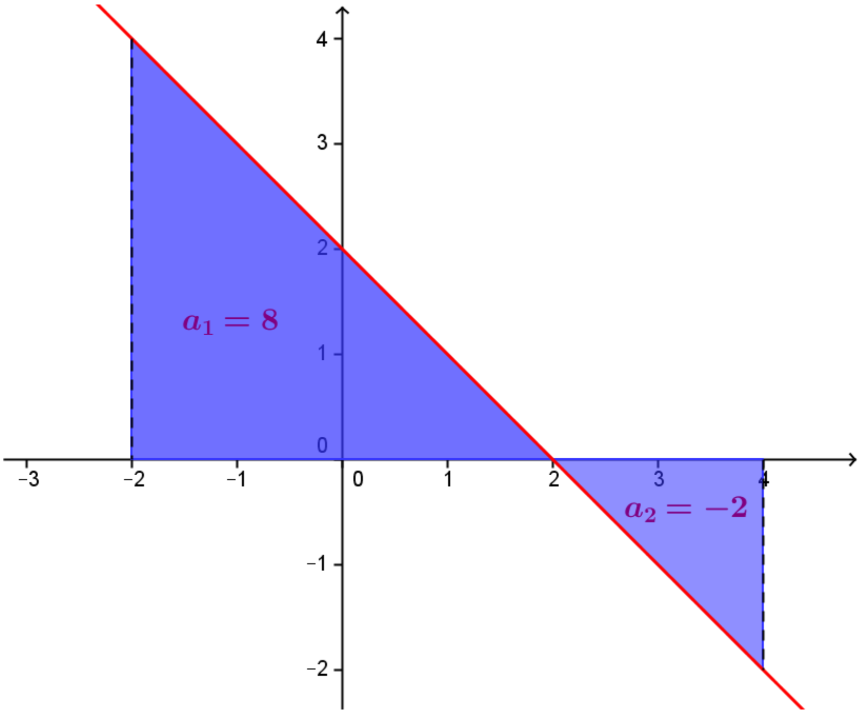
$\int_{-4}^{4} f(x)dx = I_1+I_2+I_3+I_4 =$ 7,33. Ce nombre étant la somme des aires algébriques

(**Attention** ce nombre ne représente nullement l'aire coloriée qui vaut:

$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 == 18{,}47$ unités d'aire).

Exemple2 :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(t) = -t + 2$.



On a $\int_{-2}^{4} f(t)dt = a_1+a_2 = 8 - 2 = 6$

Mais :

L'aire coloriée vaut $8 + 2 = 10$ unités d'aires

II) Propriétés des intégrales

1) Intégrale de b à a d'une fonction continue avec b > a.

Pour une fonction f continue sur $[a\,;\,b]$, on a $\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$

Cas particulier :

Si f est continue sur $[a\,;\,b]$ alors pour tout réel $c \in [a\,;\,b]$ on a $\int_{c}^{c} f(x)dx$ **=0**

Soient *f* et *g* des fonctions continues sur un intervalle *[a ; b]*

2) Linéarité de l'intégrale :

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$

Pour tout réel k, on a : $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

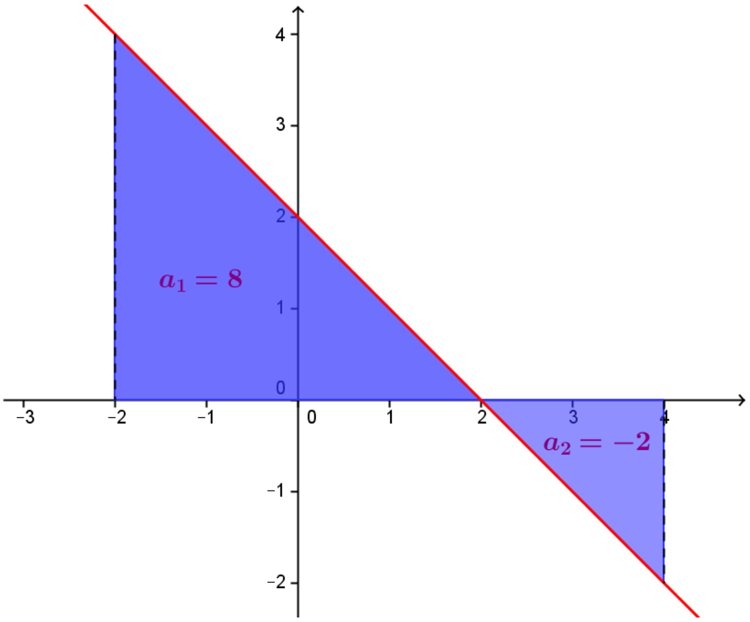
et $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) Positivité de l'intégrale:

- **Si $f(x) \geq 0$ sur $[a\,,b]$ alors** $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **Si $f(x) \leq 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors** $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

Si l'intégrale est positive, la fonction f n'est pas forcément positive, de même si l'intégrale est négative, la fonction n'est pas forcément négative.

Exemple : on a vu précédemment la fonction f définie sur ℝ par $f(t) = -t + 2$.



On a $\int_{-2}^4 f(t)dt = a_1 + a_2 = 8 - 2 = 6$

Pourtant f n'est pas positive sur $[-2; 4]$

d) Compatibilité avec l'ordre:

Si $f \leq g$ sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ alors $\int_b^a f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx$

Remarque : attention la réciproque est fausse

Preuve:

Pour tout $x \in [a;\,b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geq 0$ d'où $(g - f)(x) \geq 0$.

La fonction $g - f$ est donc positive sur l'intervalle $[a;\,b]$ donc d'après la positivité, on a:

$\int_a^b (g - f)(x)dx \geq 0$.

et en utilisant la linéarité de l'intégrale on a

$\int_a^b (g - f)(x)dx = \int_b^a (g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$

D'où $\int_a^b (g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$

Remarque : attention là encore la réciproque est fausse.

4) Relation de Chasles:

Pour tout réel $c \in [a\,;\,b]$, on a : $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

III) Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

1) Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ est le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

2) Interprétation graphique :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$

On note λ la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

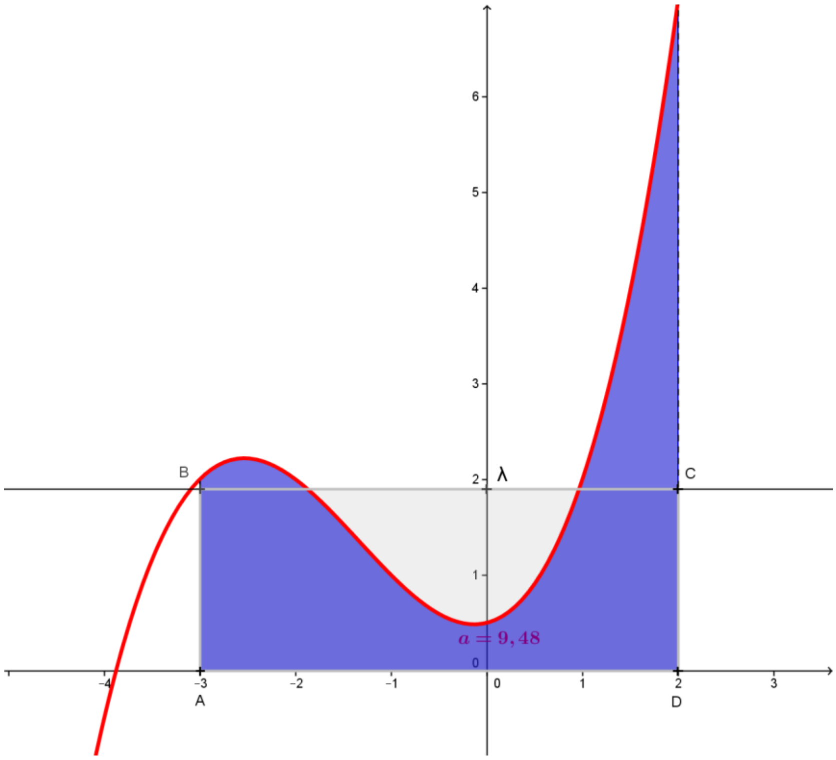
Comme $\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ On a alors :

$\int_a^b f(x)dx = \lambda(b - a)$.

Donc l'aire du domaine situé sous la courbe de f est égale à l'aire du rectangle de dimensions λ et $(b - a)$.

Sur la figure ci-dessous on a $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ = 9,48 donc $\lambda = \frac{9,48}{5}$ = 1,896

L'aire coloriée en rose est égale à l'aire du rectangle ABCD

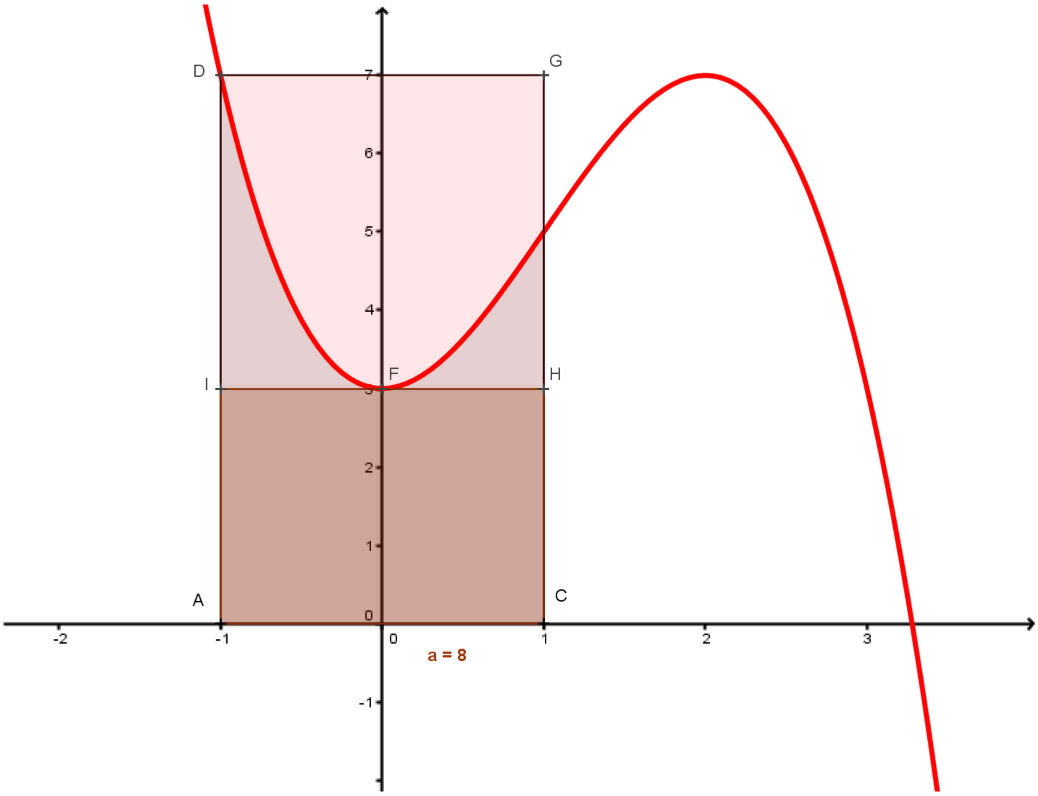


3) Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue et bornée sur $[\,a\,;\,b\,]$ donc il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [\,a\,;\,b\,]$ $m \leq f\,(\,x\,) \leq M$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Interprétation graphique:



Sur la figure ci-dessus la fonction f est continue et bornée sur $[-1 ; 1]$
par $m = 3$ et $M = 7$

Ainsi on a l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[-1 ; 1]$ (I = 8) qui est comprise entre l'aire du rectangle ACHI et l'aire du rectangle ACGD :

$$3(1-(-1)) \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx \leq 7(1-(-1))$$

$$6 \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx \leq 14$$