Compléments sur les suites

I) Vocabulaire usuel des suites

1. Sens de variation d'une suite

a. Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, une suite numérique. On dit que cette suite est :

- **croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$**
- **décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$**
- **constante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$**

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, est monotone si elle est croissante ou décroissante

Remarque : pour connaître le sens de variation d'une suite, on compare donc deux termes consécutifs de la suite. On doit faire cela pour tous les termes de la suite.

b. Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

Selon l'expression de la suite (u_n) :

• Méthode 1 : On calculera l'expression $u_{n+1} - u_n$ et on étudiera son signe :

Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite u est croissante

Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite u est décroissante

En Effet $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

• Méthode 2 : On peut aussi, sous certaines conditions, calculer l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on compare cette expression à 1 :

Tout d'abord, il faut prouver que tous les termes de la suite u sont positifs puis, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

• Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite u est croissante.

• Si, Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite u est décroissante.

En Effet, Si tous les termes de la suite u sont positifs, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$

• Méthode 3 : Dans le cas où $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonctions f sur [0 ; +∞ [

Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur [0 ; + ∞ [:

Si la fonction f est croissante sur [0 ; + ∞ [alors la suite u est croissante aussi

Si la fonction f est décroissante sur [0 ; + ∞ [alors la suite u est décroissante aussi

En effet, pour tout entier naturel n, $n < n+1$, si f est croissante alors $f(n) < f(n+1)$

si f est décroissante alors $f(n) > f(n+1)$

• Méthode 4 : On utilise le raisonnement par récurrence.

c. Exemples

Exemple 1: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_n = 3n+1$ on a donc :

$u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n+3+1 = 3n+4$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3n+4-(3n+1) = 3n+4-3n-1 = 3$. 3 est positif donc

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 2: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_{n+1} = 4 \times u_n$ et $u_0 = 2$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times u_n}{u_n} = 4$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1}$,

Comme tous les u_n sont positifs car $u_0 = 2$ et on multiplie par 2 chaque terme pour avoir le suivant

on a : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est donc croissante.

Exemple 3: On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ par : $u_n = \frac{1}{n}$

$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

Donc Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n < 0$

Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} < u_n$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Exemple 4 : On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ par : $u_n = n^2 - 3n + 1$

Considérons $f(x) = x^2 - 3x + 1$, avec $u_n = f(n)$.

Cette fonction est une fonction du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = 1{,}5$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;1{,}5]$ et croissante

sur $[1{,}5\ ;\ +\infty[$.

Dès que $n \neq 0$ ou $n \neq 1$, c'est-à-dire pour tout $n \geq 2$ $\boldsymbol{(u_n)_{n\geq 2}}$ **est strictement croissante.**

Exemple 5 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

Démontrons que la suite (u_n) est croissante pour $n \geq 1$. Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$ $u_{n+1} \geq u_n$ Notons P_n cette propriété

• **a. Initialisation :** Montrons que la propriété est vraie pour $n = 1$

$u_1 = 1$ et $u_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$u_2 \geq u_1$ donc P_1 est vraie.

• **b. Hérédité :** Supposons que pour un entier n quelconque fixé on ait P_n vraie c'est-à-dire : $u_{n+1} \geq u_n$ montrons qu'alors P_{n+1} est vraie (c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$).

$u_{n+1} \geq u_n$ ssi

$u_{n+1} + 1 \geq u_n + 1$ ssi

$\sqrt{u_{n+1} + 1} \geq \sqrt{u_n + 1}$ la fonction racine carrée étant une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur $\mathbb{N}$

On obtient donc :

$u_{n+2} \geq u_{n+1}$ ce qui implique que P_{n+1} est vraie. On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

• **Conclusion :** De a. et de b., nous pouvons donc conclure que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est donc croissante pour tout $n \geq 1$.

2. Suites majorées, minorées, bornées

Définitions :

• On dit que la suite (u_n) est majorée lorsqu'il existe un nombre réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq$ M. On dit que M est un majorant de la suite (u_n).

• On dit que la suite (u_n) est minorée lorsqu'il existe un nombre réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.On dit que M est un minorant de la suite (u_n).

• On dit que la suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 1:

La suite (u_n) définie par $u_n = 5 - \sqrt{n}$

Pour tout entier naturel n : $5 - \sqrt{n} \leq 5$ donc

Pour tout entier naturel n :$u_n \leq 5$. (u_n) est donc majorée par 5.

Exemple 2:

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1 par $u_n = \frac{-3}{n} + 2$

Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$: $\frac{1}{n} \leq 1$

On obtient donc : $\frac{-3}{n} \geq -3$

Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$: $\frac{-3}{n} + 2 \geq -3 + 2$

Pour tout entier naturel n :$u_n \geq -1$ (u_n) est donc minorée par -1.

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1 par $u_n = \frac{1}{n}$

Pour tout $n \geq 1$: $0 < \frac{1}{n} \leq 1$

La suite (u_n) est minorée par 1 et majorée par 0 elle est donc bornée.

II) Suites monotones et convergences

1) Suites monotones non majorées

Théorème :

• Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

• Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration :

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

Dire qu'une suite est majorée signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n $u_n \leq$ M

La suite (u_n) est non majorée, alors quel que soit le nombre réel A, il existe un indice N tel que $u_N >$ A

La suite (u_n) est croissante, il en résulte que pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n \geq u_N >$ A

Ce qui signifie : quel que soit le nombre réel A, l'intervalle] A ; $+\infty$ [contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. La suite (u_n) a donc pour limite $+\infty$

De façon analogue on démontre la deuxième partie de ce théorème.

Remarque :
Une suite non majorée ne tend nécessairement vers $+\boldsymbol{\infty}$**.** Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang comme par exemple : Soit (u_n) la suite définie dans $\mathbb{N}$ par $u_n = ((-1)^n + 1)n$

$u_0 = ((-1)^0 + 1) \times 0 = 0$

$u_1 = ((-1)^1 + 1) \times 1 = 0$

$u_2 = ((-1)^2 + 1) \times 2 = 4$

$u_3 = ((-1)^3 + 1) \times 3 = 0$

$u_4 = ((-1)^4 + 1) \times 4 = 8$

Plus généralement pour tout entier naturel n, $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$

Cette suite ne peut donc pas avoir pour limite $+\infty$ même si elle n'est pas majorée.

Exemples :

• Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n - 4$

Cette suite est décroissante et non minorée elle a donc pour limite $-\infty$

• Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{5n} + 4$

Cette suite est croissante et non majorée elle a donc pour limite $+\infty$

2. Suites croissantes majorées ou décroissantes minorées

Théorème :

• Toute suite croissante majorée est convergente.

• Toute suite décroissante minorée est convergente.

Ce théorème est admis.

Remarques :

• Ce théorème affirme la convergence mais il ne nous permet pas de connaitre précisément sa limite ℓ

• Pour une suite croissante, si M est un majorant de la suite (u_n), on peut seulement affirmer que $\ell \leq$ M.

• Pour une suite décroissante, si m est un minorant de la suite (u_n), on peut seulement affirmer que $\ell \geq m$

Exemple : Soit (u_n) la suite définie dans $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n}$ et $u_0 = 2$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 3$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante

Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n) ?

Réponse :

1) Pour $n \geq 0$, notons P_n la propriété : $2 \leq u_n \leq 3$

• **P_0 est vraie.** En effet lorsque $n = 0$ $u_0 = 2$, on a bien $2 \leq u_0 \leq 3$

• Supposons que pour **un entier n** quelconque **fixé** on ait P_n vraie c'est-à-dire :

$2 \leq u_n \leq 3$ alors :

$\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ on obtient :

$\dfrac{3}{3} \leq \dfrac{3}{u_n} \leq \dfrac{3}{2}$ d'où:

$\dfrac{-3}{2} \leq \dfrac{-3}{u_n} \leq -1$ on obtient donc :

$4 - \dfrac{3}{2} \leq 4 - \dfrac{3}{u_n} \leq 4 - 1$ d'où :

$\dfrac{5}{2} \leq u_{n+1} \leq 3$ on a bien : $2 \leq 2{,}5 \leq u_{n+1} \leq 3$

ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que la proposition est vraie pour tout entier naturel n
Donc pour tout entier naturel n : $2 \leq u_n \leq 3$

Montrons que la suite (u_n) est croissante :

pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 4 - \dfrac{3}{u_n} - u_n = \dfrac{4u_n - 3 - {u_n}^2}{u_n} = \dfrac{-{u_n}^2 + 4u_n - 3}{u_n}$

Etudions le signe de $-{u_n}^2 + 4u_n - 3$

Soit $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

$\Delta = 16 - 12 = 4$

Ce polynôme a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{4}}{-2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-4 - \sqrt{4}}{-2} = 3$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f(x) \geq 0$ sur [2 ; 3], Comme pour tout entier naturel n:

2 $\leq u_n \leq$ 3 alors $-{u_n}^2 + 4u_n - 3 \geq 0$

Le dénominateur étant aussi positif $u_n \geq$ 2

Donc pour tout entier naturel n: $\dfrac{-{u_n}^2 + 4u_n - 3}{u_n} \geq 0$

Donc pour tout entier naturel n: $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geq 0}$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

2) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 elle est donc convergente.

Attention, nous ne connaissons pas cette limite, ce n'est pas parce qu'elle est majorée par 3 que sa limite est 3 !!

3. Suites monotones convergentes

Théorème :

• Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite ℓ, alors pour tout entier naturel n, $u_n \leq \ell$.

• Si une suite (u_n) est décroissante et admet pour limite ℓ, alors pour tout entier naturel n, $u_n \geq \ell$.

Exemple 1 :

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \geq 1$ par : $u_n = 4 - \dfrac{3}{n}$

$u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{n+1}$

pour tout $n \geq 1$:

$u_{n+1} - u_n = 4 - \dfrac{3}{n+1} - (4 - \dfrac{3}{n})$

Donc pour tout $n \geq 1$:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{n} - \dfrac{3}{n+1} = \dfrac{3n+3-3n}{n(n+1)} = \dfrac{3}{n(n+1)} > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 - \dfrac{3}{n} = 4$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

Comme (u_n) est une suite croissante et admet 4 pour limite alors :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ $\quad u_n \leq 4$

Exemple 2 :

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \geq 1$ par : $u_n = 7 + \frac{5}{n^2}$

$u_{n+1} = 7 + \frac{5}{(n+1)^2}$

pour tout $n \geq 1$:

$u_{n+1} - u_n = 7 + \frac{5}{(n+1)^2} - (7 + \frac{5}{n^2})$

Donc pour tout $n \geq 1$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)^2} - \frac{5}{n^2}$

Or, pour tout $n \geq 1$:

$n + 1 > n > 1$ donc

$(n+1)^2 > n^2$

on obtient alors pour tout $n \geq 1$: :

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$

$\frac{5}{(n+1)^2} < \frac{5}{n^2}$ et donc :

$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)^2} - \frac{5}{n^2} < 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 7 + \frac{5}{n^2} = 7$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7$

Comme (u_n) est une suite décroissante et admet 7 pour limite alors :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\quad u_n \geq 7$