Continuité d'une fonction,
Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.

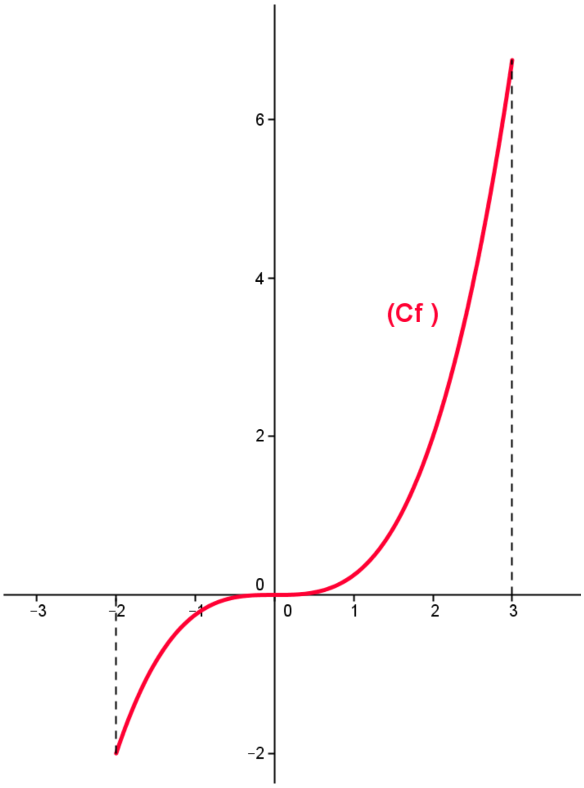
I) Notion de continuité

1) Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I lorsque le tracé de sa courbe représentative sur l'intervalle I se fait sans lever le crayon.

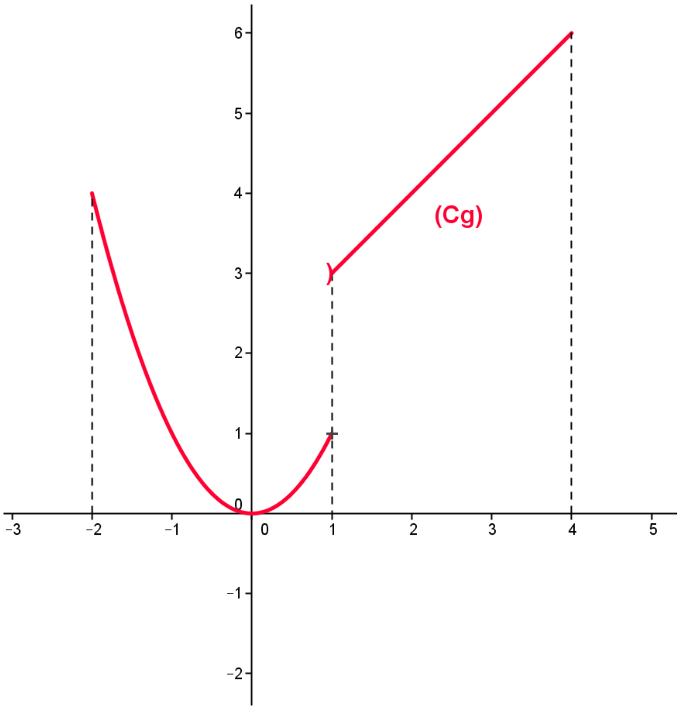
Exemples :

f est une fonction définie sur l'intervalle I = [– 2 ; 3] dont la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est représentée ci-dessous :



Cette courbe se trace sans lever le crayon sur I donc la fonction f est continue sur I.

g est une fonction définie sur l'intervalle I = [− 2 ; 4] dont la courbe ($\mathcal{C}_g$) est représentée ci-dessous :



Cette courbe ne peut pas être tracée sans lever le crayon au point d'abscisse 1 donc la fonction g n'est pas continue sur I. (par contre elle est continue sur les intervalles [− 2 ;1] et]1 ; 4])

Remarques sur la continuité:

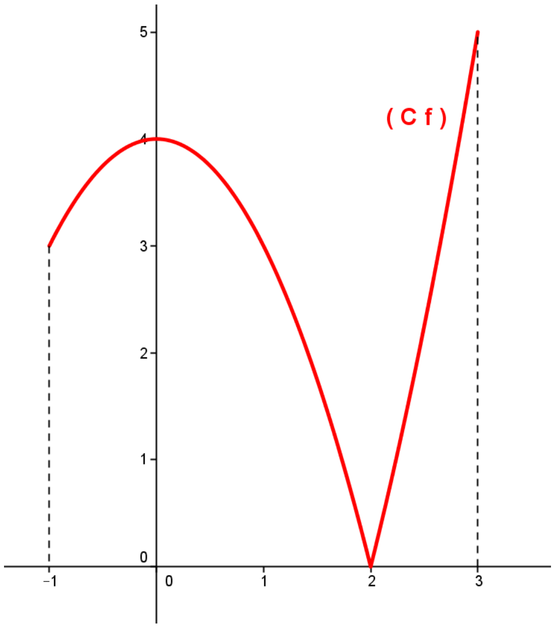
• Si une fonction f est continue sur un intervalle I, elle est continue en chaque point de cet intervalle.

• Dire qu'une fonction f est continue en a signifie que f a une limite finie en a telle que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2) Lien entre dérivabilité et continuité

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

Attention la réciproque est fausse comme l'illustre l'exemple ci-dessous où la fonction f est continue sur l'intervalle [− 1 ; 3] (en effet on peut tracer sa courbe sans lever le crayon) mais non dérivable au point d'abscisse 2 (la courbe n'admet pas de tangente en ce point).



II) Continuité des fonctions usuelles

1) Propriété (admise)

• Les fonctions polynômes, rationnelles, valeur absolue, racine carrée ainsi que les fonctions trigonométriques sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

• La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues.

Exemples :

1.La fonction f définie pour tout x réel ($x \neq \frac{5}{3}$) par $f(x) = \frac{x^2+2x+5}{3x-5}$ est continue sur les intervalles $]-\infty\ ;\ \frac{5}{3}[$ et $]\frac{5}{3}\ ;\ +\infty[$ où elle est définie.
(en effet c'est le quotient de deux polynômes continus sur $\mathbb{R}$ et $3x - 5$ est non nul sur ces intervalles).

2. La fonction g définie sur $\mathrm{I} =]-\infty\ ;\ 6[$ par $g(x) = \sqrt{6-x}$ est continue sur I comme racine carrée d'une fonction continue et positive sur I.

Remarque :

Par convention, une flèche inclinée dans un tableau de variations d'une fonction indique que celle-ci est continue et strictement croissante (ou décroissante) sur l'intervalle considéré.

Exemple :

Dans le tableau de variation ci-dessous la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 3\ ]$ et continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\ 3\ ;\ 7\ ]$

x	$-\infty$		3		7
$f(x)$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4

III) Théorème des valeurs intermédiaires

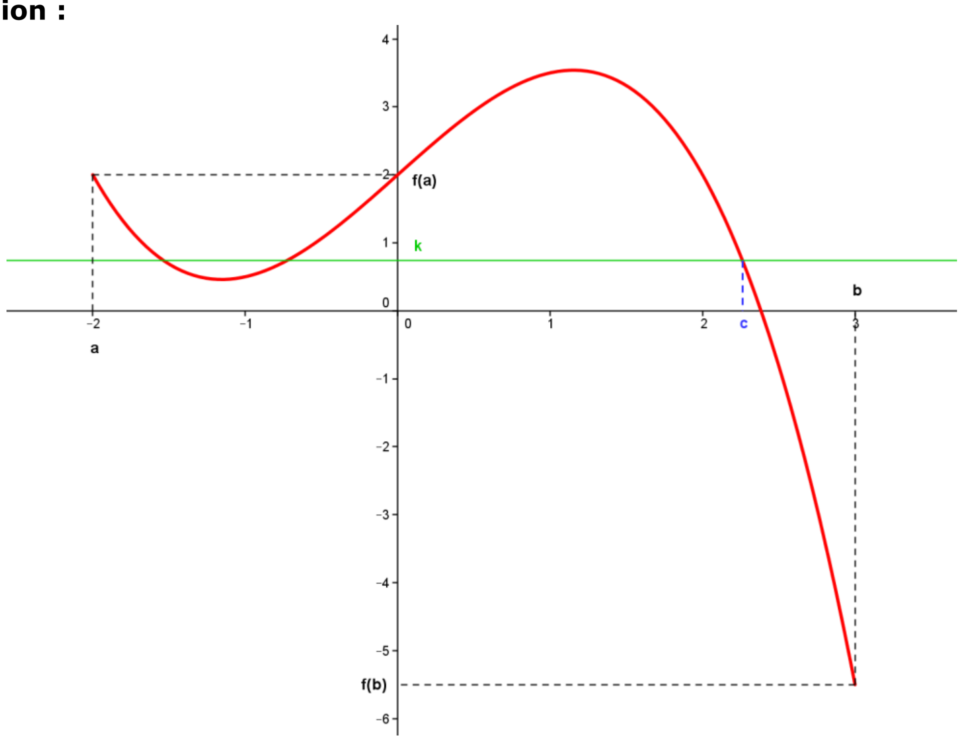
1) Théorème 1 (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution appartenant à l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Illustration :



Remarque : Comme le montre la figure ci-dessus le nombre c n'est pas nécessairement unique (ici il y aurait trois valeurs).

2) Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : Cas d'une fonction strictement monotone

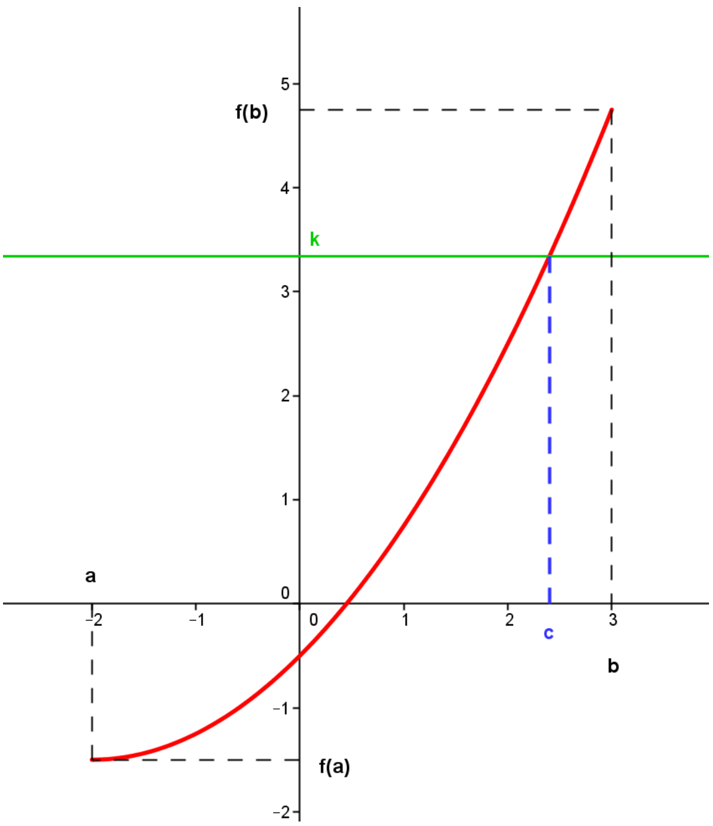
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel c tel que $f(c) = k$.

Autrement dit l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution appartenant à l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Démonstration :

La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, le théorème 1 nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un réel c tel que $f(c) = k$ pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
La fonction f étant strictement monotone sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ on a pour tout $x \in [a\ ;\ b]$, tel que $x \neq c$, $f(x) \neq f(c)$. On peut donc en conclure que le réel c est unique.

Illustration :



Remarque :

Pour démontrer que l'équation $f(x) = k$ a une unique solution sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, il suffit de démontrer que f est continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$ et que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$f(x) \; = \frac{x^3}{x+1}$

1) Etudiez les variations de f sur [-1,5 ; -1[

2) Déduisez en que l'équation $f(x) = 10$ a une unique solution α dans l'intervalle [-1,5 ; -1[

Réponse:

1) Tout d'abord calculons la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R} - \{-1\}$

$f(x) \; = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \; x^3$ donc $u'(x) = \; 3x^2$ et $v(x) = \; x + 1$ donc $v'(x) = \; 1$

Donc sur $\mathbb{R} - \{-1\}$,

$f'(x) \; = \frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2} = \frac{3x^3+3x^2-x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 \; (2x+3)}{(x+1)^2}$

Or, $x^2 \; \geq 0$ et $(x+1)^2 > 0$ car se sont des carrés, le signe de f' dépend de celui de $2x + 3$

Et $2x + 3 = 0$ pour $x = -\frac{3}{2}$

On obtient donc le tableau de variation suivant:

x	$-1{,}5$		-1	
$f'(x)$		+	‖	
$f(x)$	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$ ‖	

2) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [-1,5 ; -1[

De plus 10 ∈ [$\frac{27}{4}$; $+\infty$ [donc il existe un unique réel α dans l'intervalle [-1,5 ; -1[tel que $f(\alpha) = 10$

Exemple 2 :

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-5	↗	$+\infty$

Expliquer pourquoi l'équation $f(x) \; + \; 3 \; = \; 0$ admet exactement trois solutions distinctes sur $\mathbb{R}$.

Réponse:

$f(x) + 3 = 0$ équivaut à résoudre $f(x) = -3$

Pour appliquer le théorème 2 nous devons travailler dans des intervalles où la fonction est strictement monotone.

Nous allons donc appliquer notre théorème sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$ puis sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$ et enfin sur l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$

• **Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$:**

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.

De plus -3 ∈ $]-\infty\ ;\ 2]$ donc il existe un unique réel x_1 dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$ tel que $f(x_1) = -3$

• **Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$:**

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$.

De plus -3 ∈ $[-5\ ;\ 2]$ donc il existe un unique réel x_2 dans l'intervalle $[-5\ ;\ 2]$ tel que $f(x_2) = -3$

• **Sur l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$**

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$

De plus -3 ∈ $[-5\ ;\ +\infty[$ donc il existe un unique réel x_3 dans l'intervalle $[-5\ ;\ +\infty[$ tel que $f(x_3) = -3$

• **Conclusion :** L'équation $f(x) + 3 = 0$ admet exactement trois solutions distinctes sur $\mathbb{R}$.

Cas particulier :

Pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, il suffit de démontrer que f est continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$ et que $f(a) \times f(b) < 0$.

En effet $f(a) \times f(b) < 0$ implique que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et non nuls.

Donc 0 ∈ [f(a) ; f(b)] ou 0 ∈ [f(b) ; f(a)]

Exemple :

La fonction f est continue et strictement croissante sur I = [-4 ; 5] et vérifie $f(-4) = -3$ et $f(5) = 2$

L'équation $f(x) = 0$ admet-elle une solution dans I ?

Réponse:

La fonction f est continue et strictement croissante sur I = [-4 ; 5]. De plus $f(-4) < 0$ et $f(5) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

3) Théorème 3 :Cas généralisé d'une fonction monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de la forme $]-\infty\ ;\ a\ [$ ou $]a\ ;\ +\infty[$ ou $]-\infty\ ;\ +\infty\ [$ et admettant les limites ℓ et m réelles ou infinies aux bornes de cet intervalle. Alors pout tout réel k compris entre ℓ et m il existe un unique réel $c \in$ I tel que $f(c) = k$

Exemples :

1) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc pour tout réel k l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique.

2) La fonction définie sur [1 ; +∞ [par $g(x) = \sqrt{x-1}$ est continue et strictement croissante sur [1 ; +∞ [, de plus $g(1) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc pour tout réel $k \geq 0$ l'équation $g(x) = k$ admet une solution unique.

IV) Exemple d'utilisation

• Montrons que l'équation $cos(x) = x$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$

Considérons pour cela la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) - x$.

On a f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ sa dérivée $f'(x) = -\sin(x) - 1$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 - x \leq f(x) \leq 1 - x$ donc on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Tout ceci nous permet de conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

On peut de plus encadrer cette solution plus précisément que $f(0) = 1$ et que $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ ce qui permet de conclure que **cette solution se trouve dans l'intervalle [0 ; $\frac{\pi}{2}$]**

L'utilisation d'un tableau de valeurs sur calculatrice ou d'un tableur permettrait d'encadrer cette solution avec la précision voulue : Notons α cette solution.

• Cherchons maintenant à l'aide d'un tableur un encadrement de la solution α à 10^{-3} près

x	cosx-x	
0	1	
0,1	0,89500417	
0,2	0,78006658	
0,3	0,65533649	
0,4	0,52106099	
0,5	0,37758256	
0,6	0,22533561	
0,7	0,06484219	> 0
0,8	-0,10329329	< 0
0,9	-0,27839003	
1	-0,45969769	
1,1	-0,64640388	
1,2	-0,83764225	
1,3	-1,03250117	
1,4	-1,23003286	
1,5	-1,4292628	

On sait que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, donc on prend différentes valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ avec un pas de 0,1

Donc 0,7 < α< 0,8

Changeons encore le pas de x afin d'avoir une valeur approchée de α plus précise.

On sait que 0,7 < α < 0,8 donc on prend différentes valeurs de x comprises entre 0,7 et 0,8 avec un pas de 0,01

	A	B	C
1	x	cosx-x	
2	0,7	0,06484219	
3	0,71	0,04836188	
4	0,72	0,03180573	
5	0,73	0,0151744	> 0
6	0,74	-0,00153144	< 0
7	0,75	-0,01831113	
8	0,76	-0,03516399	
9	0,77	-0,05208933	
10	0,78	-0,06908646	
11	0,79	-0,08615468	
12	0,8	-0,10329329	
13	0,81	-0,12050157	
14	0,82	-0,13777879	
15	0,83	-0,15512424	
16	0,84	-0,17253717	
17	0,85	-0,19001685	

Donc 0,73 < α< 0,74

Changeons encore le pas de x afin d'avoir une valeur approchée de α plus précise.

On sait que 0,73 < α < 0,74 donc on prend différentes valeurs de x comprises entre 0,73 et 0,74 avec un pas de 0,001

x	cosx-x	
0,73	0,0151744	
0,731	0,01350716	
0,732	0,01183917	
0,733	0,01017044	
0,734	0,00850097	
0,735	0,00683075	
0,736	0,0051598	
0,737	0,0034881	
0,738	0,00181566	
0,739	0,00014248	> 0
0,74	-0,00153144	< 0

Donc 0,739 < α< 0,740

Changeons encore le pas de x afin d'avoir une valeur approchée de α plus précise.

On sait que 0,739 < α < 0,740 donc on prend différentes valeurs de x comprises entre 0,739 et 0,740 avec un pas de 0,0001

A	B	C
x	cosx-x	
0,739	0,000142477	> 0
0,7391	-2,48813E-05	< 0
0,7392	-0,000192247	
0,7393	-0,000359621	
0,7394	-0,000527001	
0,7395	-0,00069439	
0,7396	-0,000861785	
0,7397	-0,001029188	
0,7398	-0,001196598	
0,7399	-0,001364016	
0,74	-0,001531441	
0,7401	-0,001698874	
0,7402	-0,001866314	
0,7403	-0,002033761	
0,7404	-0,002201216	
0,7405	-0,002368678	
0,7406		

Donc 0,739 < α< 0,7391

Conclusion : A 10^{-3} près, α ≈ 0,739