Dérivées : Rappels et compléments

I) Rappels

1) Dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre réel a, soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On dit que la fonction f est dérivable au point d'abscisse a si et seulement si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers zéro. On note :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$$

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a. On le note $f'(a)$.

Exemples :

1°) Soit $f(x) = x^2 - 3$, calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 3

Calcul du taux de variation : Pour $h \neq 0$: $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$f(3) = 3^2 - 3 = 6$ et $f(3+h) = (3+h)^2 - 3 = 9 + 6h + h^2 - 3 = h^2 + 6h + 6$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{h^2+6h+6-6}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} = 6 + h$$

Calcul de la limite lorsque h tend vers zéro :

$$\lim_{h \to 0}(6+h) = 6$$

D'où f est dérivable au point d'abscisse 3 et $f'(3)$=6

2°) Soit $f(x) = \frac{4x}{x+2}$ Calculons s'il existe le nombre dérivé de f au point d'abscisse 0

Calcul du taux de variation $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$f(0+h) = \frac{4h}{h+2}$ $\qquad$ $f(0) = 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{4h}{h+2}}{h} = \frac{4}{h+2}$$

Calcul de la limite lorsque h tend vers zéro :

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{4}{h+2}\right) = 2$$

D'où f est dérivable au point d'abscisse 0 et $f'(0)$ =2

2) Tangente à une courbe en un point.

Soit f une fonction dérivable en a, ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative et A le point de ($\mathcal{C}$) d'abscisse a.

La tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point A (a ; (a)) est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

3) Equation de la tangente.

Soit f une fonction dérivable en *a*, (C) sa courbe représentative et A le point de (C) d'abscisse *a*.

La tangente à la courbe (C) au point A a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque : La tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe ($\mathcal{C}$) au voisinage du point A.

Démonstration :

D'après la définition la tangente T à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse à une équation de la forme : $y = f'(a)\,x + b$

Comme A(a ; $f(a)$) appartient à T on a : $f(a) = f'(a)a + b$ d'où $b = f(a) - f'(a)a$

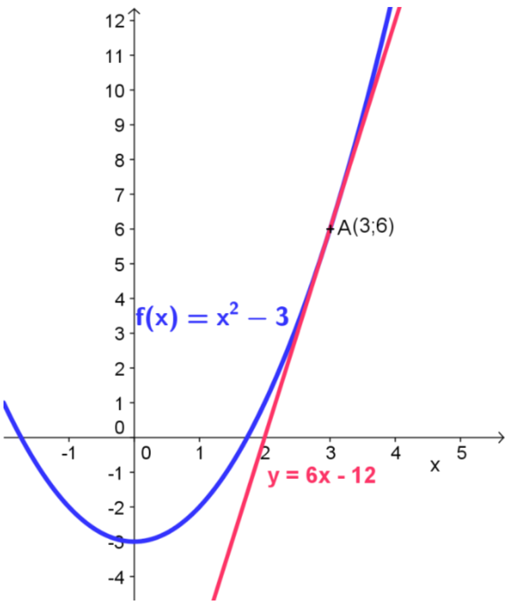
Donc on obtient $y = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ et finalement $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exemples :

Exemple 1 : Donner une équation de la tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$ au point d'abscisse 3

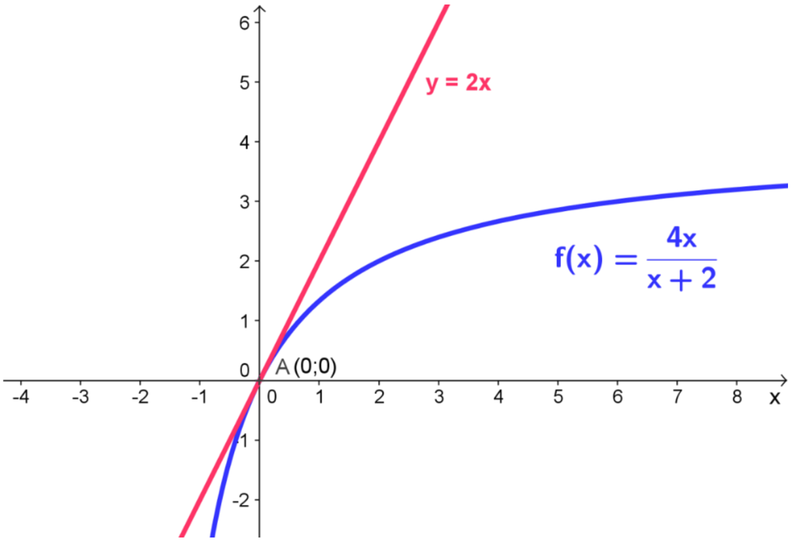
On a vu précédemment que $f'(3) = 6$ de plus $f(3) = 6$ donc une équation de cette tangente est :

$y = 6(x - 3) + 6$ soit $y = 6x - 12$



Exemple2 : Donner une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x}{x+2}$ au point d'abscisse 0.

On a vu précédemment que $f'(0) = 2$ de plus $f(0) = 0$ donc une équation de cette tangente est : $y = 2x$



3) Fonction dérivée.

Une fonction f est dérivable sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) D si, et seulement si elle est dérivable pour tout réel $a \in$ D

Si f est dérivable sur D, on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction notée f' définie sur D par : $a \to f'(a)$

Exemple:

Si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors pour tout $a \neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{-(x-a)}{xa}}{x-a} = -\frac{1}{xa} \text{ pour } x \neq 0$$

Donc pour tout $a \neq 0$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{1}{a^2}$$

f **est dérivable sur]-∞ ; 0[∪]0 ; +∞[et sa fonction dérivée est** f' **:** $a \mapsto -\frac{1}{a^2}$

4) Dérivées des fonctions usuelles.

Fonction f :	*Dérivable sur :*	*Fonction dérivée f' :*
$f(x) = k\ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n (n \in N)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	] - ∞ ; 0 [∪] 0 ; + ∞ [	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	] - ∞ ; 0 [∪] 0 ; + ∞ [	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	] 0 ; + ∞ [	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = cos(x)$
$f(x) = cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -sin(x)$

5) Dérivées et opérations.

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel on a :

Fonction	***Dérivable sur***	***Dérivée***
$u(x) + v(x)$	D	$u'(x) + v'(x)$
$\lambda u(x)$	D	$\lambda u'(x)$
$u(x)v(x)$	D	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\dfrac{1}{u(x)}$	D ∩ $\{x \ / \ v(x) \neq 0\}$	$-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	D ∩ $\{x \ / \ v(x) \neq 0\}$	$\dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Exemples :

• **Exemple 1 :** Calculer la dérivée de la fonction f

$f(x) = \dfrac{x^2+5x+2}{2x-3}$ Pour $x \neq \dfrac{3}{2}$ $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

$u(x) = x^2 + 5x + 2$ donc $u'(x) = 2x + 5$

$v(x) = 2x - 3$ donc $v'(x) = 2$

Pour tout $x \neq \dfrac{3}{2}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{(2x+5)(2x-3)-2(x^2+5x+2)}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2-6x+10x-15-2x^2-10x-4}{(2x-3)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-6x-19}{(2x-3)^2}$$

Donc f' est la fonction définie sur $]-\infty\,;\frac{3}{2}[\,\cup\,]\frac{3}{2}\,;+\infty[$ **par** $f'(x) = \dfrac{2x^2-6x-19}{(2x-3)^2}$

• **Exemple 2 :** Calculer la dérivée de la fonction g:

$g(x) = (2x+5)(6x-2)$ Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$\boldsymbol{g(x) = u(x)\, v(x)}$ avec :

$\boldsymbol{u(x) = 2x+5}$ donc $\boldsymbol{u'(x) = 2}$

$\boldsymbol{v(x) = 6x-2}$ donc $\boldsymbol{v'(x) = 6}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2(6x-2) + 6(2x+5) = 12x - 4 + 12x + 30 = 24x + 26$

Donc g' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{g'(x) = 24x + 26}$

• **Exemple 4 :** Calculer la dérivée de la fonction i :

$i(x) = \frac{1}{x^2-2x+4}$

$x^2 - 2x + 4 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 < 0$ donc pour tout x de $\mathbb{R}$: $x^2 - 2x + 4 \neq 0$

Pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}$ **:** $\boldsymbol{i(x) = \frac{1}{u(x)}}$

$\boldsymbol{u(x) = x^2 - 2x + 4}$ donc $\boldsymbol{u'(x) = 2x - 2}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$i'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2} = \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+4)^2} = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$

$i'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$

Donc i' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{i'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}}$

II) Compléments :

1) Propriété (admise)

• **Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et :**

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

• **Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction u^n où n est un entier strictement positie est dérivable sur I et :**

$$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u'$$

Exemples :

1°) Soit $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{3x^2+4}}$ est dérivable pour tout $\boldsymbol{x}$ réel et on a :

$u(x) = 3x^2 + 4$ donc $u'(x) = 6x$ de là :

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+4}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}}$$

2°) Soit $g(x) = (3x^3 + 2x^2 - 5)^4$

On a $u(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5$ donc $u'(x) = 9x^2 + 4x$ de là :

$\boldsymbol{f'(x) = 4\left(3x^3 + 2x^2 - 5\right)^3 \times (9x^2 + 4x)}$

2) Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur $u(\mathrm{I})$, alors la fonction g qui à x associe $f(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$\boldsymbol{g'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)}$$

En particulier si u est une fonction affine avec $u(x) = ax + b$, alors $g(x) = f(ax+b)$ et on a :

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

Exemples :

Exemple 1 : Soit $f(x) = (\cos(x))^2$ On a $u(x) = \cos(x)$ donc $u'(x) = -sin(x)$ de là $f'(x) = 2\cos(x) \times (-\sin(x))$

Exemple 2 : Soit $f(x) = \cos(4x+3)$ On a $u(x) = 4x + 3$ de là $f'(x) = 4 \times (-\sin(4x+3))$

Exemple 3 : Soit $g(x) = f(x^2 + 2x)$ avec f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $u(x) = x^2 + 2x$ donc $u'(x) = 2x + 2$

Alors $g'(x) = f'(x^2 + 2x) \times (2x + 2)$