Equations différentielles

I) Equations différentielles du type $y' = f$

1) Lien entre équation différentielle $y' = f$ et primitive de f

a. Vocabulaire et définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et y une fonction de x définie et dérivable sur I.

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Résoudre une équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions solutions de cette équation.

b. Définition

Résoudre $y'(x) = f(x)$ revient à chercher l'expression de $y(x)$ telle que si on dérive $y(x)$ on obtient $f(x)$.
Cela revient à chercher l'ensemble des primitives de la fonction $f(x)$.

Exemple 1 : Résoudre $y'(x) = 2x + 4$

On cherche une fonction $y(x)$ dont sa dérivée est $2x + 4$. Cela revient à chercher une primitive de $2x + 4$ on obtient donc :

$y(x) = x^2 + 4x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc :

$y(x) = x^2 + 4x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exemple 2 : Résoudre $y'(x) = e^{2x+4}$ telle $y(0) = 2$

Méthode :

• Tout d'abord déterminons les primitives de e^{2x+4}

Les solutions sont donc de la forme $y(x) = \frac{e^{2x+4}}{2} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

• Ensuite on détermine la valeur de k en utilisant la condition donnée $y(0) = 2$

$y(0) = \frac{e^{2\times0+4}}{2} + k = 2$ donc $\frac{e^4}{2} + k = 2$ donc $k = 2 - \frac{e^4}{2}$

• On peut enfin donner l'expression de $y(x)$

$y(x) = \frac{e^{2x+4}}{2} + 2 - \frac{e^4}{2} = \frac{e^{2x+4}}{2} - \frac{e^4}{2} + 2$

II) Equations différentielles du type $y' = ay$

1) Propriété

Soit y une fonction de x définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a une constante non nulle.
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a nombre réel non nul) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est un nombre réel.

Démonstration :

• Le fonction f_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'_k(x) = ake^{ax}$ on a bien $f'_k(x) = af_k$
Donc f_k est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Réciproquement : on considère une fonction g sur $\mathbb{R}$ solution de $y' = ay$.

On note $\Phi(x)$ la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = g(x)\, e^{-ax}$

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $\Phi'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = e^{-ax}(g'(x) - ag(x))$

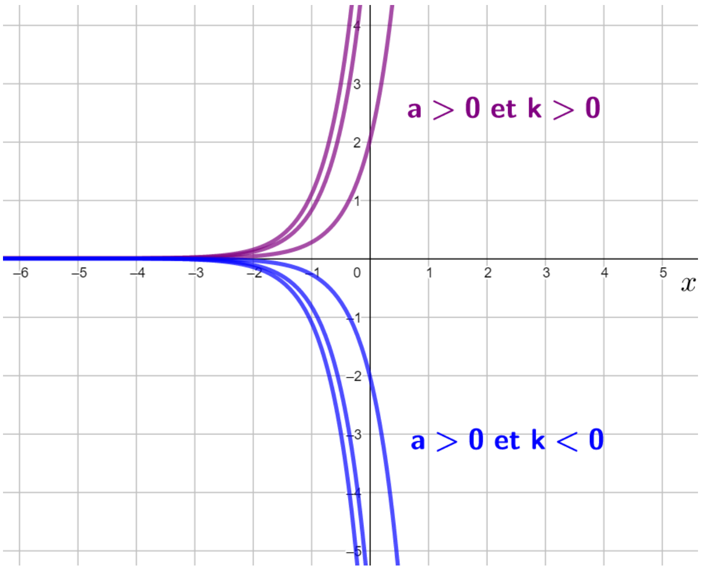
Or comme g est solution de l'équation $y' = ay$ alors $g'(x) = ag(x)$ donc $g'(x) - ag(x) = 0$

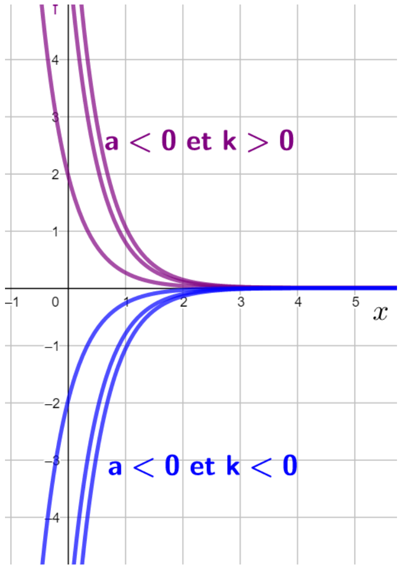
Donc $\Phi'(x) = e^{-ax}\left(g'(x) - ag(x)\right) = 0$

La dérivée de Φ étant nulle alors Φ est une fonction constante.

Il existe donc un réel k, $k \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(x) = k$ donc $\Phi(x) = g(x)e^{-ax} = k$ donc $g(x) = ke^{ax}$

2) Différentes courbes représentatives des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$:





3) Exemple

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 5y = 0$
a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition $f(0) = 3$

Solution :

a. $y' - 5y = 0$ si, et seulement si $y' = 5y$
Les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f_k(x) = ke^{5x}$ où k est un nombre réel.

b. On sait que $f(0) = 3$, grâce à cette condition on va déterminer la valeur de k :
donc $f_k(0) = ke^{5\times 0} = 3$ donc $k = 3$

La solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ est $f(x) = 3e^{5x}$

II) Equations différentielles du type $y' = ay + b$

1) Propriété

Soit y une fonction de x définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a une constante non nulle.
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b deux nombres réels non nuls) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un nombre réel.

2) Exemple

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 5y = 4$
a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition $f(0) = 0$

Solution :

a. Tout d'abord on écrit l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ et on identifie a et b.
$y' - 5y = 4$ si, et seulement si $y' = 5y + 4$ donc $a = 5$ et $b = 4$
Les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f_k(x) = ke^{5x} - \frac{4}{5}$ où k est un nombre réel.

b. On sait que $f(0) = 0$, grâce à cette condition on va déterminer la valeur de k :
donc $f_k(0) = ke^{5\times 0} - \frac{4}{5} = 0$ donc $k = \frac{4}{5}$

La solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ est $f(x) = \frac{4}{5}e^{5x} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(e^{5x} - 1)$