Etude de limites de suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

I) Généralités

1) Définition

Une suite définie par récurrence est une suite définie par son premier terme et par une relation de récurrence, qui définit chaque terme à partir du précédent ou des précédents lorsqu'ils existent.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a un nombre réel

La suite (u_n) définie par :

$u_0 = a$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite récurrente

2) Généralités

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a un nombre réel.

Notons (u_n) la suite définie par :

$u_0 = \text{a}$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = f(u_n)$

Si on démontre que la suite (u_n) est convergente vers un nombre réel ℓ et que la fonction f est continue en ℓ, alors en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient l'égalité $f(\ell) = \ell$.

Ce qui veut dire que si une suite (u_n) converge alors sa limite est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

Mais attention : Trouver la ou les solutions de l'équation $f(\ell) = \ell$ ne prouve pas que la suite (u_n) converge. La convergence de la suite (u_n) dépend aussi de son premier terme u_0 (voir les exemples donnés dans le paragraphe suivant).

3) Méthode graphique

Nous pouvons conjecturer, graphiquement, sur la convergence de la suite.

Dans les exemples ci-après nous allons montrer à partir d'un graphique l'importance du choix du premier terme u_0.

a) Méthode pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence de la forme :

Pour $u_0 = a$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = f(u_n)$:

On se place dans un repère orthonormé

• On trace, la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$

• On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses. On trace l'image de u_0 par f pour obtenir sur l'axe des ordonnées u_1: $u_1 = f(u_0)$

• On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$

• On fait de même pour obtenir u_2 puis u_3 etc.....

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = a$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = u_n^2$

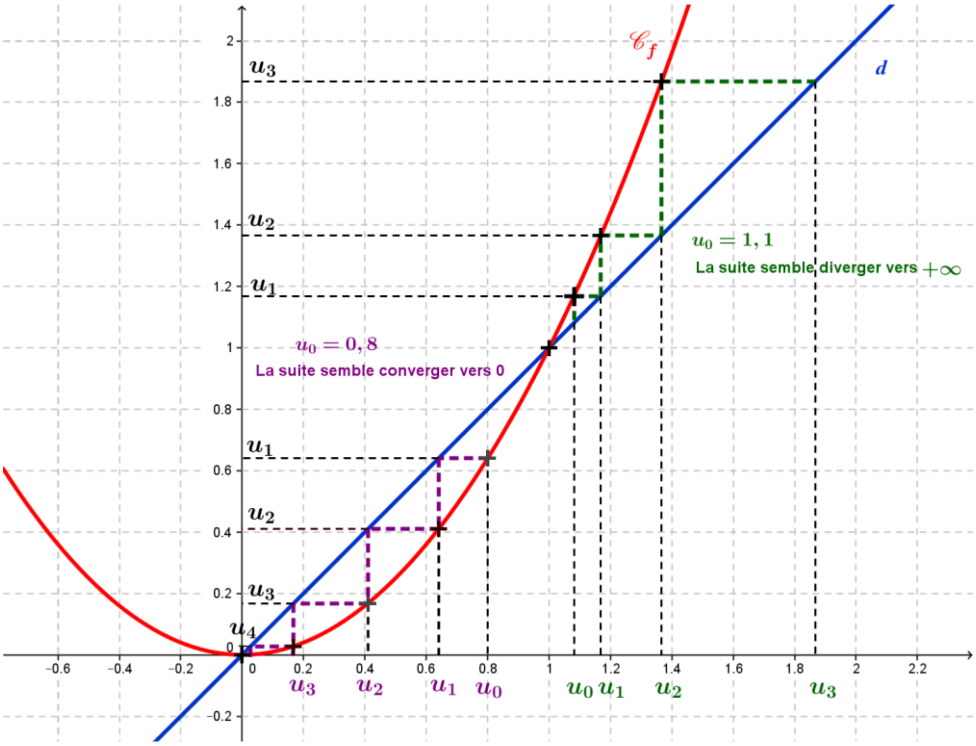
L'équation $f(x) = x$ a deux solutions : 0 et 1. Si la suite (u_n) converge alors elle converge soit vers 0 , soit vers 1

• En prenant u_0 dans l'intervalle]-1 ; 1[, la suite (u_n) converge vers 0 (suite tracée en violet sur le graphique)

• En prenant u_0 tel que $u_0 > 1$ ou $u_0 < -1$, la suite (u_n) diverge vers +∞ (suite tracée en vert sur le graphique)

• En prenant $u_0 = 1$ alors pour tout entier naturel n, $u_n = 1$

• En prenant $u_0 = -1$ alors pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 1$



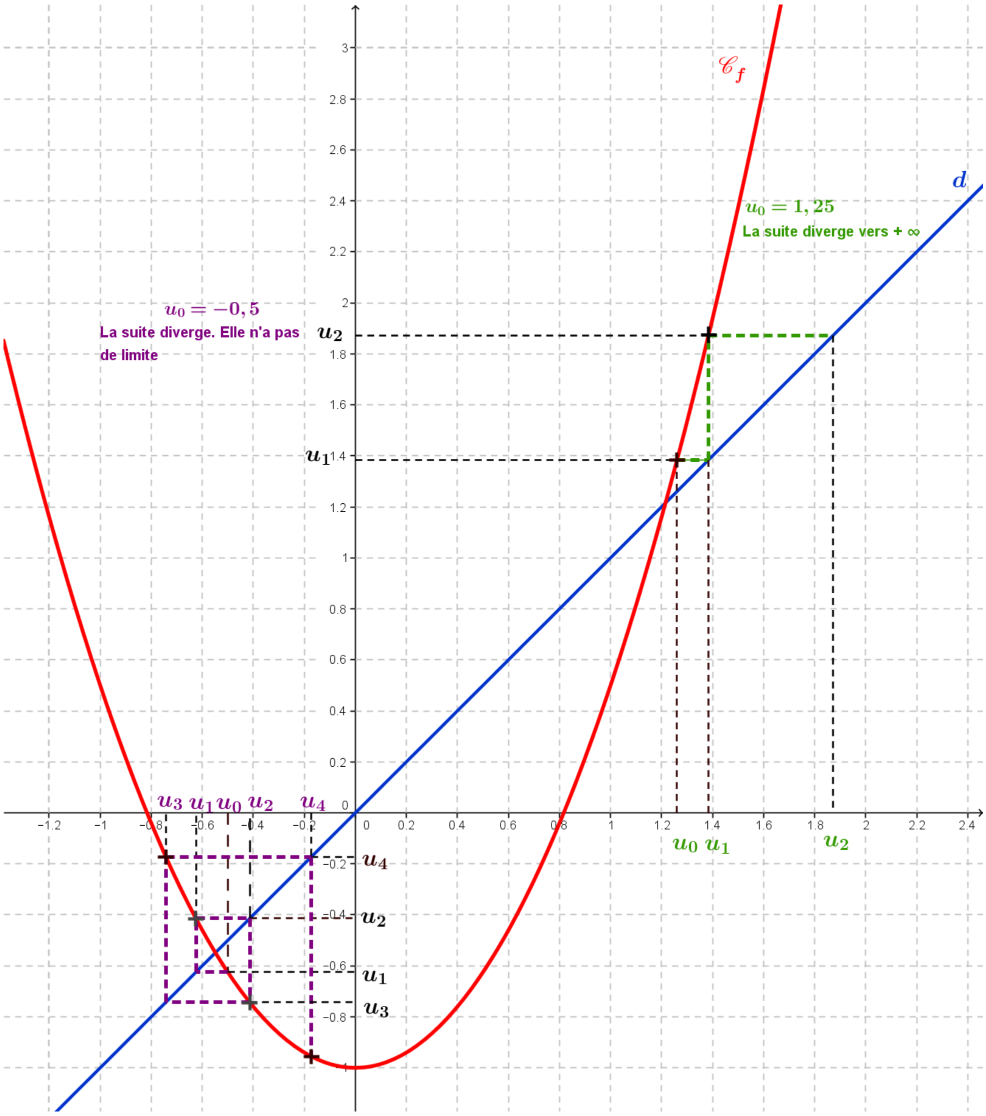
Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = \text{a}$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = 1{,}5\,u_n^2 - 1$

L'équation $f(x) = x$ a deux solutions : $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$. Si la suite (u_n) converge alors elle converge soit vers $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$, soit vers $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$

• En prenant $u_0 = -0{,}5$, on observe sur le graphique que la suite (u_n) diverge sans limite (suite tracée en violet sur le graphique).

• En prenant $u_0 = 1{,}25$, on observe sur le graphique que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ (suite tracée en vert sur le graphique).



II) Exemple d’étude de suite récurrente convergente

1) Exemple 1 : La suite récurrente est monotone

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$ et $u_0 = 2$

1. A l’aide d’un tableur déterminer les vingt premiers termes de la suite. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

2. a. Sur un même graphique, dans un repère orthonormé , tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur [0 ; 5] par $f(x) = \sqrt{3x}$ et la droite (d) d’équation $y = x$

b. Déterminer les coordonnées du point d’intersection de $\mathcal{C}_f$ et d.

c. Tracer graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n).

3.a. Montrer que pour tout entier naturel n : $2 \leq u_n \leq 3$

b. Montrer que pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est croissante

c. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. Soit $f(x)$ la fonction définie sur [2 ;3] par $f(x) = \sqrt{3x}$

a. Démontrer que l’équation $f(x) = x$ admet comme unique solution 3.

b. Déduisez en la limite de la suite (u_n).

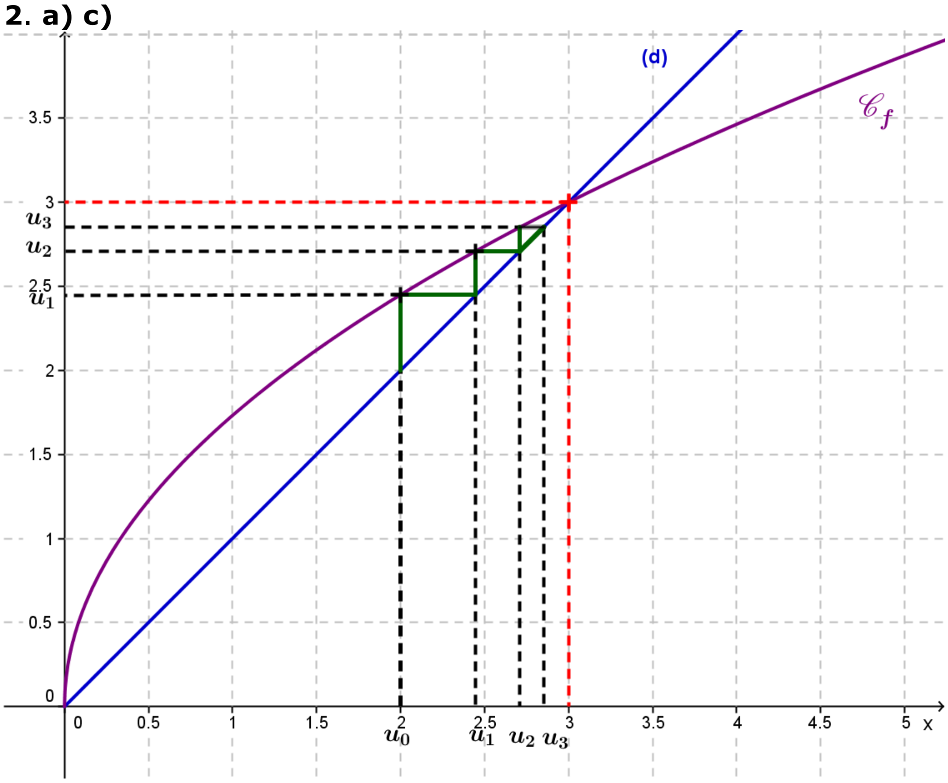
Réponse:

1.

u0	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7	u8	u9	u10	u11	u12	u13	u14	u15
2	2,4495	2,7108	2,8517	2,9249	2,9622	2,981054	2,9905	2,99525	2,99763	2,99881	2,999406	2,9997	2,99985	2,99993	2,999963

La limite de la suite (u_n) semble être 3.

2. a) c)



Remarque :

La droite d'équation $y = x$ sert à reporter sur l'axe des abscisses les termes de la suite (u_n): On place u_0 sur l'axe des abscisses, on trace $u_1 = f(u_0)$, on utilise la droite (d) pour reporter u_1 sur l'axe des abscisses .Ensuite on détermine $u_2 = f(u_1)$, on utilise la droite (d) pour reporter u_2 sur l'axe des abscisses et ainsi de suite...

b) Les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et d sont (3 ;3)

Si on observe le graphique , la suite (u_n) semble être croissante et il semble que pour tout entier naturel n : $2 \leq u_n \leq 3$
Nous allons le montrer dans les deux questions suivantes.

3.a. Montrons par récurrence que $2 \leq u_n \leq 3$

Soit P_n : $2 \leq u_n \leq 3$

• **P_0 est vraie.** En effet $u_0 = 2$ et $2 \leq 2 \leq 3$

• Supposons que pour **un entier naturel n quelconque fixé** on ait P_n vraie c'est-à-dire: $2 \leq u_n \leq 3$

Alors $6 \leq 3u_n \leq 9$ d'où : $2 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{3u_n} \leq \sqrt{9}$ ce qui implique : $\boldsymbol{2 \leq u_{n+1} \leq 3}$

Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que **la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul).**

• **Donc pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 3$.**

3 b. montrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$

Soit P_n la propriété: $u_{n+1} \geq u_n$

• **Pour $n = 0$:** $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{6}$ comme $\sqrt{6} \geq 2$ alors $u_1 \geq u_0$

Donc P_0 est vraie

• Supposons que pour **un entier naturel n quelconque fixé** on ait P_n vraie c'est-à-dire:

$u_{n+1} \geq u_n$

$u_{n+1} \geq u_n$ alors

$3u_{n+1} \geq 3u_n$ on obtient :

$\sqrt{3u_{n+1}} \geq \sqrt{3u_n}$ donc

$u_{n+2} \geq u_{n+1}$

Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que **la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul).**

• **Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante.**

3c. La suite (u_n) est croissante majorée elle est donc convergente.

4a. L'équation $f(x) = x$ équivaut à : $\sqrt{3x} = x$ ce qui implique : $3x = x^2$ ce qui donne :

$x^2 - 3x = 0$. En factorisant, on obtient:

$x(x-3) = 0$ cette équation a pour solutions : 0 et 3

O n'appartenant pas à l'intervalle [2 ; 3] **alors $f(x) = x$ n'a qu'une seule solution sur [2 ; 3] qui est 3.**

4b. Comme (u_n) est convergente et que f est continue sur l'intervalle [2 ; 3] alors **elle converge vers 3** solution unique de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle [2 ; 3]

2) Exemple 2 : La suite récurrente n'est pas monotone

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$ et $u_0 = -3$

1. A l'aide d'un tableur déterminer les vingt premiers termes de la suite. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

2. a. Sur un même graphique, dans un repère orthonormé ,tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur [-3 ; 3] par $f(x) = \sqrt{6-x}$ et la droite (d) d'équation $y = x$

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et d.

c. Tracer graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n).

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{|u_n - 2|}{2}$

3b. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 2| \leq (\frac{1}{2})^n \; |u_0 - 2|$

3c. En déduire la limite de (u_n).

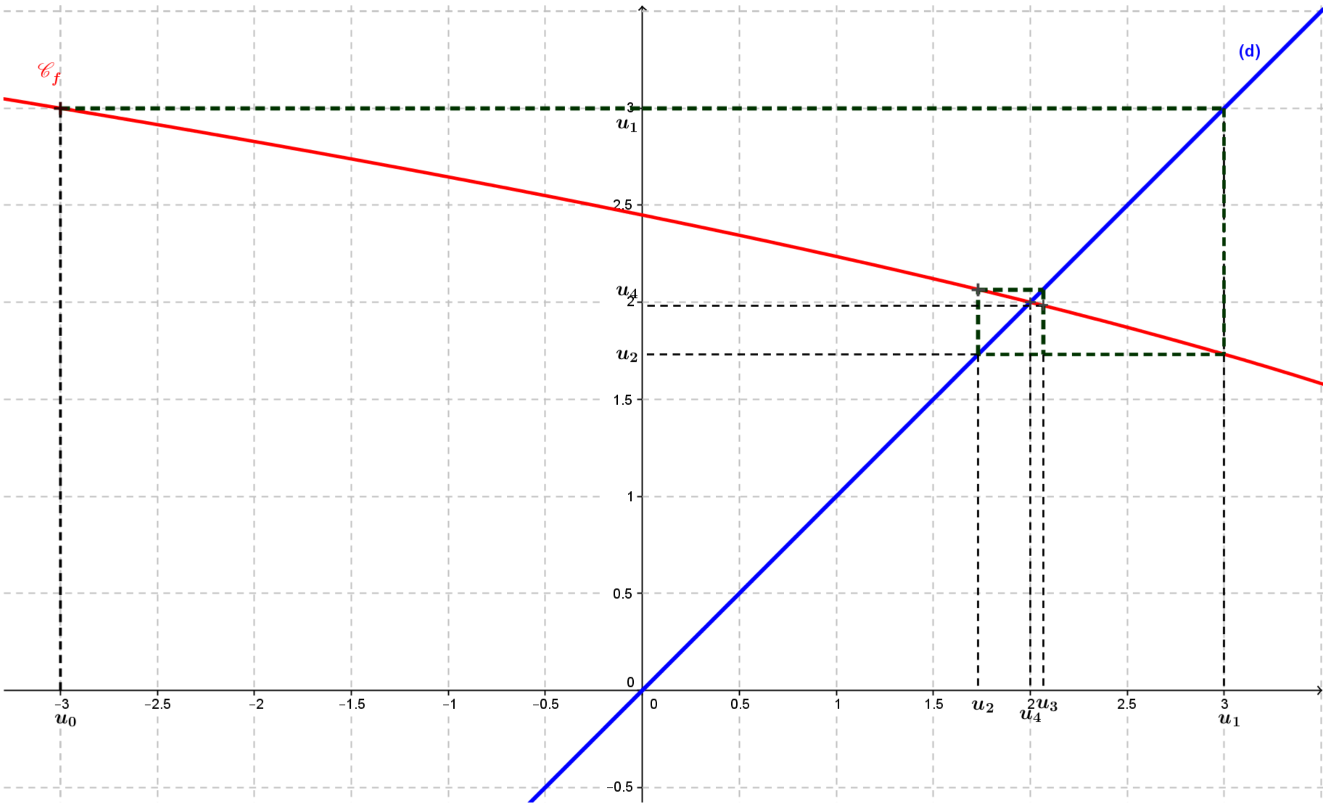
Réponse:

1.

u0	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7	u8	u9	u10	u11	u12	u13	u14	u15
-3	3	1,7321	2,0659	1,9835	2,0041	1,998967	2,0003	1,99994	2,00002	2	2,000001	2	2	2	2

La limite de la suite (u_n) semble être 2.

2a.c.



2 b. Les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et d sont (2 ;2)

Si on observe le graphique, la suite (u_n) n'est pas monotone.

3. a. pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - 2 = \sqrt{6 - u_n} - 2 = \frac{(\sqrt{6-u_n}-2)(\sqrt{6-u_n}+2\,)}{(\sqrt{6-u_n}+2\,)} = \frac{6 - u_n - 4}{(\sqrt{6-u_n}+2)} = \frac{2 - u_n}{(\sqrt{6-u_n}+2)}$$

Or $\sqrt{6 - u_n} \geq 0$ donc $\sqrt{6 - u_n} + 2 \geq 2$ donc : $\frac{2 - u_n}{(\sqrt{6-u_n}+2)} \leq \frac{1}{2}\,(2 - u_n)$

Donc pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{|u_n - 2|}{2}$

3b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 2| \leq (\frac{1}{2})^n\ |u_0 - 2|$.
Notons P_n cette propriété.

• **Pour $n = 0$:** de la question précédente on en déduit : $|u_1 - 2| \leq |u_0 - 2|$ donc
$|u_1 - 2| \leq (\frac{1}{2})^0\ |u_0 - 2|$ **Donc P_0 est vraie**

• Supposons que pour **un entier naturel n quelconque fixé** on ait P_n vraie c'est-à-dire:

$|u_{n+1} - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0 - 2|$ alors de la question précédente on en déduit :

$$|u_{n+2} - 2| \leq \frac{|u_{n+1}-2|}{2} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-2|}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\ \left|u_0 - 2\right|$$

Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que **la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul).**

• **Donc pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 2| \leq (\frac{1}{2})^n\ |u_0 - 2|$.**

3c. Pour tout entier naturel n, $0 \leq |u_{n+1} - 2| \leq (\frac{1}{2})^n\ |u_0 - 2|$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n\ |u_0 - 2| = 0$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 2| = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

III) Exemple de suite récurrente divergente vers $+\infty$

Extrait bac S 2013 France métropolitaine

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1$

1 a. Calculer u_0, u_1, u_2 , u_3 et u_4. On pourra donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2 a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq n + 3$

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

c. En déduire la validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

Réponse :

1 a

$u_0 = 2$

$u_1 = \frac{2}{3} u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1$ donc $u_1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$

$u_2 = \frac{2}{3} u_1 + \frac{1}{3} \times 1 + 1$ donc $u_2 = \frac{14}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{26}{9} \approx 2{,}89$

$u_3 = \frac{2}{3} u_2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1$ donc $u_3 = \frac{52}{27} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{97}{27} \approx 3{,}59$

$u_4 = \frac{2}{3} u_3 + \frac{1}{3} \times 3 + 1$ donc $u_4 = \frac{194}{81} + \frac{3}{3} + 1 = \frac{356}{81} \approx 4{,}40$

b. Cette suite semble être croissante

2 a. Démontrons que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq n + 3$

Pour cela utilisons un raisonnement par récurrence :

Soit P_n : $u_{n+1} \leq n + 3$

• En effet $u_1 = \frac{7}{3}$ et $\frac{7}{3} \leq 0 + 3$ donc **P_0 est vraie.**

• Supposons que pour **un entier naturel n quelconque fixé** on ait P_n vraie c'est-à-dire:

$u_{n+1} \leq n + 3$

$u_{n+2} = \frac{2}{3} u_{n+1} + \frac{1}{3} (n + 1) + 1$

Or, $\frac{2}{3} u_{n+1} + \frac{1}{3} (n + 1) + 1 \leq \frac{2}{3} (n + 3) + \frac{1}{3} n + \frac{1}{3} + 1$

$\frac{2}{3} u_{n+1} + \frac{1}{3} (n + 1) + 1 \leq \frac{2}{3} n + 2 + \frac{1}{3} n + \frac{4}{3}$

$\frac{2}{3} u_{n+1} + \frac{1}{3} (n + 1) + 1 \leq n + \frac{10}{3} \leq n + 4$

Donc $u_{n+2} \leq n + 4$ c'est-à-dire : $\boldsymbol{u_{n+1} \leq (n + 1) + 3}$

Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que **la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul).**

• **Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq n + 3$**

b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1 - u_n = \frac{-1}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1$

En factorisant par $\frac{1}{3}$ on obtient:

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} (n + 3 - u_n)$

c. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$

Or,pour tout entier naturel n, $u_n \leq n+3$

$\frac{1}{3}(n+3-u_n) \geq \frac{1}{3}(n+3-(n+3))$

Donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{3}(n+3-(n+3))$

Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

3 a. $v_n = u_n - n$ alors pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 = u_{n+1} - n - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$

Donc pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

Ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$

b. (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$:

$v_n = v_0 \times (\frac{2}{3})^n$ $\qquad$ $v_n = v_0 \times (\frac{2}{3})^n$

$v_0 = u_0 = 2$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = 2 \times (\frac{2}{3})^n$

pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = v_n + n$ donc :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 2 \times (\frac{2}{3})^n + n$

c. pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 2 \times (\frac{2}{3})^n + n$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ alors $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$