

Fonction logarithme népérien

I) La fonction logarithme népérien : Définition

1) Définition de la fonction logarithme népérien

Soit a un nombre réel strictement positif. On appelle **logarithme népérien de a** , noté $\ln(a)$ ou $\ln a$ l'unique nombre solution de l'équation : $\exp(x) = a$

La fonction exponentielle (étudiée dans le chapitre précédent), est dérivable (donc continue) et strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il en résulte que :

- L'image par la fonction exponentielle de \mathbb{R} est $]0 ; +\infty[$
- Pour tout $x > 0$ il existe un unique nombre y et un seul tel que: $e^y = x$
- On définit ainsi une fonction de $]0 ; +\infty[$ dans \mathbb{R} appelé fonction logarithme népérien.

2) Conséquences

- La fonction \ln est définie sur $]0 ; +\infty [$
- Pour tout nombre $x > 0$, par définition on a :

$$e^{\ln(x)} = x$$

Conséquence :

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(1) = 0$$

3) Théorème:

Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre b :

$$\ln(a) = b \text{ équivaut à } a = e^b$$

a) Démonstration :

Si $\ln(a) = b$ alors $e^{\ln(a)} = e^b$ c'est à dire $a = e^b$

Réciproquement si $a = e^b$ alors $\ln(a) = \ln(e^b)$ c'est-à-dire $\ln(a) = b$

b) Exemples d'application :

Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x) = 5$

Cette équation n'est possible que pour $x > 0$ on a donc

$\ln(x) = 5$ si et seulement si $e^{\ln(x)} = e^5$ si et seulement si $x = e^5$.

La solution est : $S = \{e^5\}$

b) $\ln(x) = -3$

Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

$\ln(x) = -3$ si et seulement si $e^{\ln(x)} = e^{-3}$ si et seulement si $x = e^{-3}$.

La solution est : $S = \{e^{-3}\}$

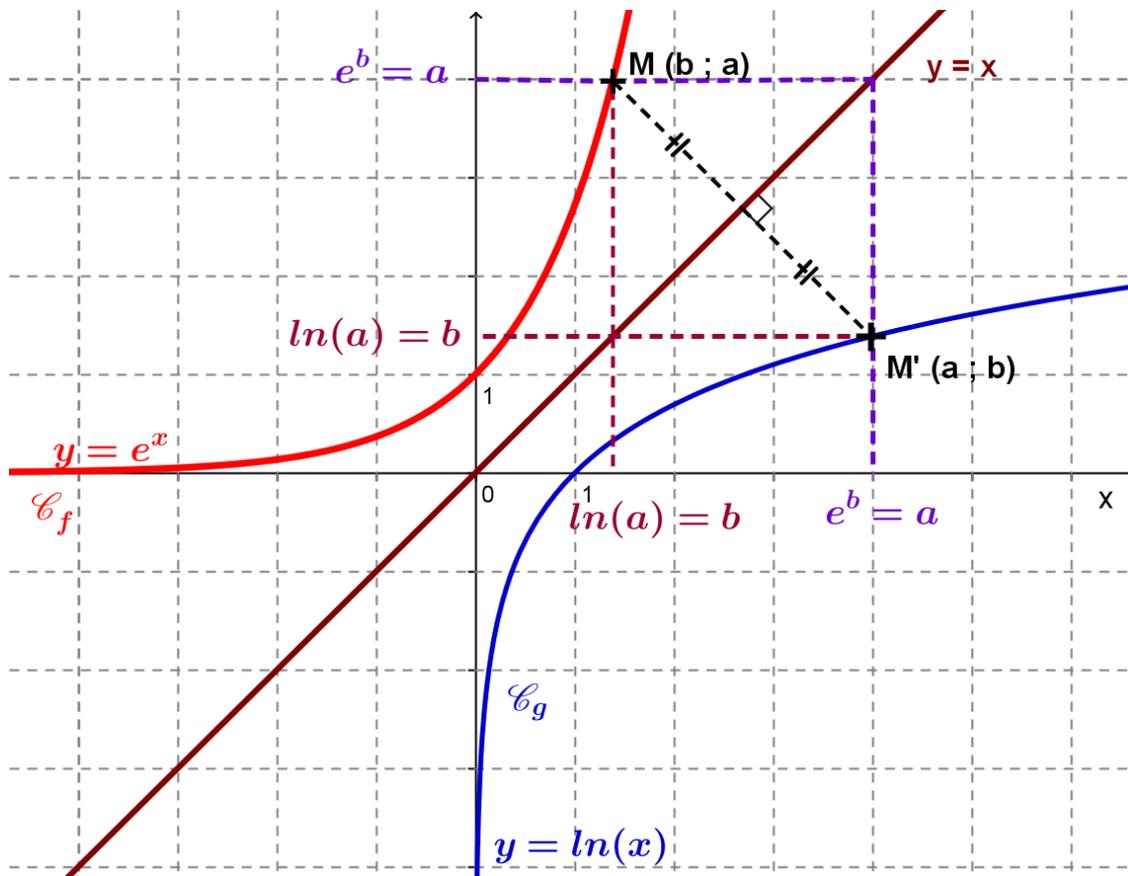
c) $4 \ln(x) = 3$ Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

elle est équivalente à : $\ln(x) = \frac{4}{3}$ d'où $x = e^{\frac{4}{3}}$ **La solution est : $S = \{e^{\frac{4}{3}}\}$**

c) Conséquence graphique

Dire que le point $M(b; a)$ appartient à la courbe représentative de la fonction exponentielle, ou encore si $a = e^b$ cela revient à dire, d'après le théorème précédent, que $b = \ln a$ c'est-à-dire que le point $M'(a; b)$ appartient à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

Cela a pour conséquence que, dans un repère orthonormé, les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$



4) Sens de variation

Théorème :

La fonction \ln est strictement croissante sur $]0 ; + \infty[$

Démonstration: Considérons deux nombres u et v strictement positifs tel que $u < v$

Comme $u = e^{\ln(u)}$ et $v = e^{\ln(v)}$ alors cela revient à écrire: $e^{\ln(u)} < e^{\ln(v)}$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , alors on a forcément : $\ln(u) < \ln(v)$

Ce qui prouve que la fonction \ln est elle aussi strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

Conséquence :

Pour tout nombre réel a et b strictement positifs :

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

II) Propriétés de la fonction logarithme népérien

1) Propriétés de la fonction logarithme népérien

Pour tout nombre réel a et b strictement positifs :

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Pour tous nombres a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)$$

2) Exemples :

Exemple 1 : Résoudre l'équation suivante :

$\ln(x) + \ln(5) - 4 = 0$ Cette équation n'est possible que pour $x > 0$
elle est équivalente à: $\ln(5x) = 4$ d'où $5x = e^4$ On obtient donc : $x = \frac{e^4}{5}$

La solution est: $S = \left\{\frac{e^4}{5}\right\}$

Exemple 2 : Ecrire $\ln(24)$ et $\ln\left(\frac{16}{9}\right)$ sous la forme $a\ln(2) + b\ln(3)$ a et b étant réels

- $\ln(24) = \ln(3 \times 8) = \ln(3) + \ln(8) = \ln(3) + \ln(2^3) = \ln(3) + 3\ln(2)$

Donc $\ln(24) = \ln(3) + 3 \ln(2)$

- $\ln\left(\frac{16}{9}\right) = \ln\left(\frac{2^4}{3^2}\right) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$ Donc : $\ln\left(\frac{16}{9}\right) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$

Exemple 3 : Résoudre l'équation suivante $\ln(3x - 4) = 2$

Il faut que $3x - 4 > 0$ soit $x > \frac{4}{3}$ Cette équation n'est possible que pour $x > \frac{4}{3}$

$\ln(3x - 4) = 2$ alors $3x - 4 = e^2$ donc $x = \frac{4 + e^2}{3}$ comme $\frac{4 + e^2}{3} > \frac{4}{3}$ alors

La solution est : $S = \left\{\frac{4 + e^2}{3}\right\}$

Exemple 4 : Résoudre l'équation suivante $\ln(x + 2) = \ln(x) + 1$

$x + 2 > 0$ soit $x > -2$ de plus il faut aussi que $x > 0$ il faut donc que $x > 0$

Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

$\ln(x + 2) = \ln(x) + 1$ donc $\ln(x + 2) - \ln(x) = 1$ ce qui implique que :

$$\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1 \text{ ce qui donne : } \frac{x+2}{x} = e^1$$

$$x + 2 = e x$$

$$x(1 - e) = -2$$

$$x = \frac{-2}{1-e} = \frac{2}{e-1} > 0$$

La solution est : $S = \left\{\frac{2}{e-1}\right\}$

Exemple 5 : Résoudre l'équation suivante: $2e^{2x-1} = e^x$

$2e^{2x-1} = e^x$ on obtient donc :

$$\ln(2e^{2x-1}) = \ln(e^x) \text{ on en déduit :}$$

$$\ln(2) + \ln(e^{2x-1}) = \ln(e^x)$$

$$\ln(2) + 2x - 1 = x$$

$$2x - x = 1 - \ln(2)$$

$$x = 1 - \ln(2)$$

La solution est : $S = \{1 - \ln(2)\}$

Exemple 6 : Résoudre l'équation suivante : $e^{2x} + 3e^x = 10$

Ce qui équivaut à : $(e^x)^2 + 3e^x = 10$

Posons $X = e^x$

Or pour tout x de \mathbb{R} , $e^x > 0$ donc $X > 0$ on obtient alors :

$$X^2 + 3X = 10$$

$X^2 + 3X - 10 = 0$ Cette équation a pour solutions $X_1 = 2$ et $X_2 = -5$

Comme $X > 0$ alors l'unique solution est $X_1 = 2$ ($X_2 < 0$) ne peut être solution)

Donc $e^x = 2$

On obtient donc : $x = \ln(2)$

La solution est : $S = \{\ln(2)\}$

3) Démonstrations:

• Montrons que $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$

Pour tout nombre a et b strictement positifs :

$$e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} \text{ (Propriété de la fonction exponentielle)}$$

Or $e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$ donc : $e^{\ln(a)+\ln(b)} = a \times b$

De plus $e^{\ln(a \times b)} = a \times b$ donc :

$$e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a \times b)} \text{ il en résulte :}$$

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$$

- Montrons que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

Pour tout nombre a strictement positif :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \text{ si et seulement si } \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = 0$$

$$\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln(1) = 0$$

$$\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) \text{ (en utilisant la propriété précédente)}$$

On obtient donc :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = 0$$

$$\text{D'où le résultat : } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

- Montrons que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Pour tout nombre a et b strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$$

On obtient donc :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b) = \ln(a)$$

$$\text{D'où le résultat : } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

- Montrons que $\ln(a^n) = n \ln(a)$

Pour tout nombre a strictement positif, montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $\ln(a^n) = n \ln(a)$

Soit P_n la propriété : $\ln(a^n) = n \ln(a)$

a. Initialisation : P_0 est vraie. En effet lorsque $n = 0$ on obtient : $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \ln(a) = 0$ donc on a bien P_0 vraie

b. Hérédité : Supposons que pour un entier naturel n quelconque fixé on ait P_n vraie c'est-à-dire : $\ln(a^n) = n \ln(a)$ on a donc

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n \ln(a) + \ln(a) = (n + 1) \ln(a)$$

On a bien : $\ln(a^{n+1}) = (n + 1) \ln(a)$ Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

Conclusion : De a. et b. on peut donc conclure que la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul).

Donc pour tout entier naturel n , $\ln(a^n) = n \ln(a)$

- Montrons que $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Pour tout nombre a strictement positif :

$$\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2 \ln(\sqrt{a})$$

On obtient donc : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

• Pour tous nombres a_1, a_2, \dots, a_n , montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n, n \geq 2, \ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)$

Soit P_n la propriété : $\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)$

a. Initialisation : P_2 est vraie. En effet lorsque $n = 2$ on obtient : $\ln(a_1 \times a_2) = \ln(a_1) + \ln(a_2)$ (propriété 1) donc on a bien P_2 vraie

b. Hérédité : Supposons que pour un entier naturel $n, n \geq 2$ quelconque fixé on ait P_n vraie c'est-à-dire :

$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)$ on a donc

$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times a_{n+1}) = \ln[(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) \times a_{n+1}] = \ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) + \ln(a_{n+1}) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n) + \ln(a_{n+1})$ On a bien

$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times a_{n+1}) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n) + \ln(a_{n+1})$

Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

c. Conclusion : De a. et de b. on peut donc conclure que la proposition est vraie pour tout entier naturel $n (n \geq 2)$.

- **Donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,**

$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)$

III) Etude de la fonction logarithme népérien

1) Dérivée de la fonction \ln

On admet que la fonction \ln est continue sur $]0 ; +\infty[$

Théorème:

La fonction \ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Démonstration:

On sait que pour tout $x > 0, e^{\ln(x)} = x$

Or, $(e^u)' = u'e^u$ et la fonction dérivée de x est 1

Si $f(x) = x$ alors $f'(x) = 1$ donc $(e^{\ln(x)})' = 1$

On obtient donc : pour tout $x > 0, (e^{\ln(x)})' = (\ln x)' \times e^{\ln(x)} = 1$

Donc pour tout $x > 0, (\ln x)' \times x = 1$ d'où

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

La fonction \ln est donc dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa fonction dérivée est $\frac{1}{x}$

2) Limites de la fonction \ln

Théorème :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$

Démonstration :

Soit $f(x) = \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ donc $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$
 f est donc croissante sur $]0 ; +\infty[$

- Soit M un nombre réel, la fonction \ln étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ alors pour tout $x > e^M$, $\ln(x) > \ln(e^M)$, donc $\ln(x) > M$

Ce qui veut dire que pour tous les nombres x suffisamment grands, tout intervalle ouvert de la forme $]M ; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$. Par conséquent: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

- Soit $X = \frac{1}{x}$ alors lorsque x tend vers 0 ($x > 0$), X tend vers $+\infty$

$$\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\ln(X)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln(X) = -\infty$$

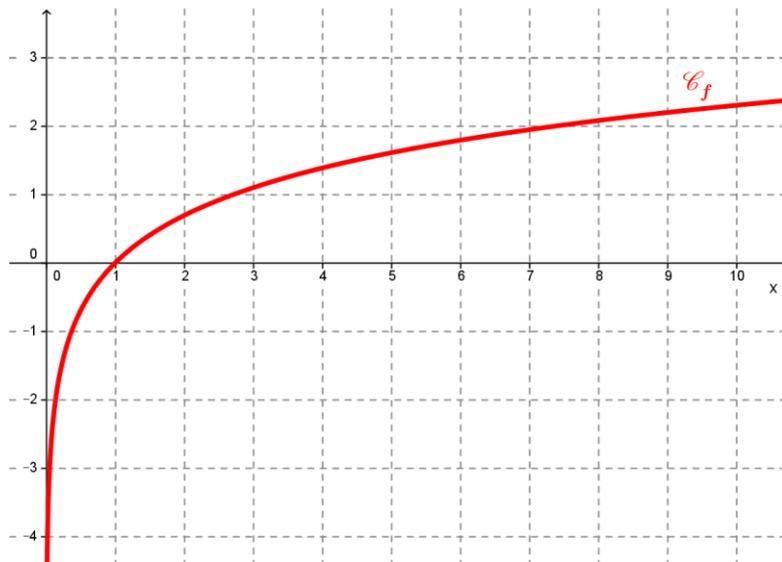
3) Tableau de variation et courbe représentative de la fonction \ln

a) Tableau de variation :

Les résultats précédents nous permettent d'écrire:

x	0	1		e	$+\infty$
$\ln'(x)$			+		
$\ln(x)$	- ∞	0		1	> $+\infty$

b) Courbe représentative de la fonction \ln



4) Limites importantes

Théorème :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$

Démonstration de la première formule:

- Comme $\ln(1) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}$

On reconnaît la limite, quand x tend vers 0, du taux d'accroissement de la fonction \ln entre 1 et $1+x$, limite égale au nombre dérivé de \ln en 1. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = (\ln)'(1) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \lim_{Y \rightarrow -\infty} Y e^Y = 0$ (voir chapitre fonction exponentielle)

IV) La fonction logarithme décimal

Définition:

La fonction logarithme décimal, notée \log , est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Remarques :

- Comme la fonction $\log(x) = \frac{1}{\ln(10)} \times \ln(x)$ et $\frac{1}{\ln(10)} > 0$ alors la fonction \log a le même sens de variation que la fonction \ln

- La fonction \log a les mêmes propriétés et les mêmes limites que la fonction \ln

V) Etude de la fonction : $\ln(u(x))$

• Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction f définie sur l'intervalle I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

- Comme la fonction u est strictement positive alors le signe de la dérivée dépend du signe de la fonction u'
- Comme la fonction \ln est strictement croissante alors d'après le théorème des fonctions composées le sens de variations de f est le même que celui de u .
- Si $u(x)$ tend vers $+\infty$ alors $\ln(u(x))$ tend aussi vers $+\infty$
- Si $u(x)$ tend vers 0 alors $\ln(u(x))$ tend vers $-\infty$
- Si $u(x)$ tend vers 1 alors $\ln(u(x))$ tend vers $\ln(1)$ c'est-à-dire 0

C'est une application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exemple: Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x - 10)$

Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = x^2 - 3x + 10$

Dans notre exemple $f(x) = \ln(u(x))$

- **Déterminons, tout d'abord, son domaine de définition :**

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Delta = 9 + 4 \times 1 \times 10 = 49 \text{ on a donc } x_1 = 5 \text{ et } x_2 = -2$$

$$x^2 - 3x + 10 > 0 \text{ pour } x < -2 \text{ et } x > 5$$

La fonction f est définie sur $]-\infty; -2[\cup]5; +\infty[$

- Etudions les variations de f :

$$u'(x) = 2x - 3 \text{ donc}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+10}$$

$$f'(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{3}{2} \quad u'(x) \geq 0 \text{ pour } x \geq \frac{3}{2} \text{ et } u'(x) \leq 0 \text{ pour } x \leq \frac{3}{2}$$

En tenant compte du domaine de définition :

f est donc décroissante sur $]-\infty; -2[$ et croissante sur $]5; +\infty[$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	5	$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$\ln(u(x))$	$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$	$+\infty$

Les courbes représentatives des fonctions u et f sont :

