Fonctions sinus et cosinus

I) Rappels

1) Repérage sur le cercle trigonométrique

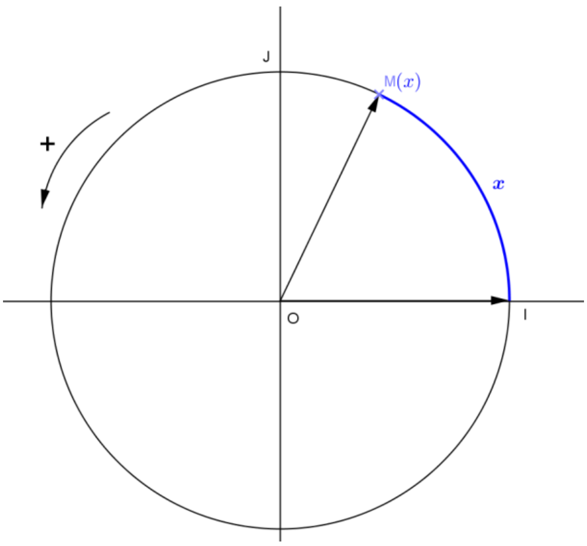
Sur un cercle trigonométrique :

- à tout nombre réel t on associe un point M unique ;

- si un point M est associé à un nombre t alors il est aussi associé à tout nombre t' tel que $t' = t + 2k\pi$, k $\in \mathbb{Z}$.

• Chacun des nombres précédents est une mesure, en radian de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$

• Parmi toutes ces mesures, il existe une et une seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. Il s'agit de la mesure principale de l'angle orienté des vecteurs $(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM})$



2) Cosinus et sinus d'un nombre

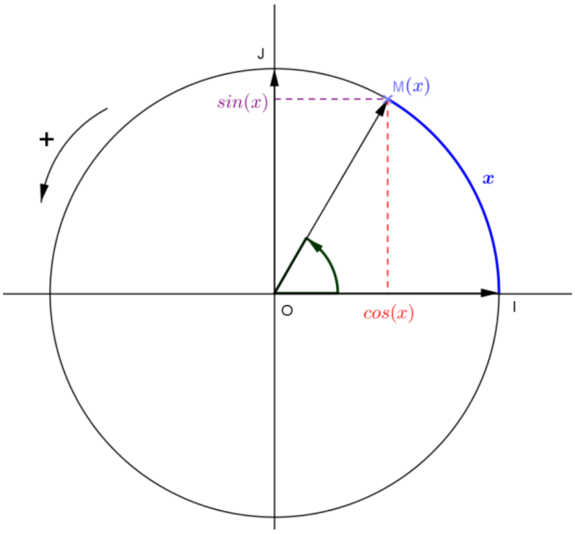
a) Définition :

Soit M un point du cercle trigonométrique ($\mathcal{C}$) associé au nombre réel x

Les coordonnées du point M sont : (cos x ; sin x)

Le cosinus de x noté cos x est l'abscisse du point M.

Le sinus de x noté sin x est l'ordonnée du point M.



b) Propriétés :

Pour tout nombre réel x et tout nombre entier relatif k :

- **-1 $\leq$ cos $x \leq$ 1** **-1 $\leq$ sin $x \leq$ 1**
- **cos $(x+2k\pi)$ = cos x** **sin $(x+2k\pi)$ = sin x**
- **cos² x + sin² x = 1**

Démonstration (voir cours de 1ere spécialité maths)

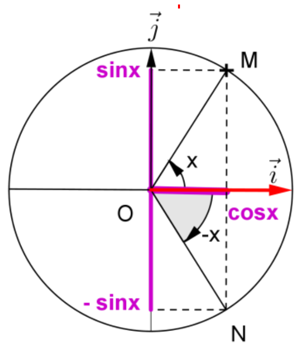
c) Valeurs remarquables

x (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

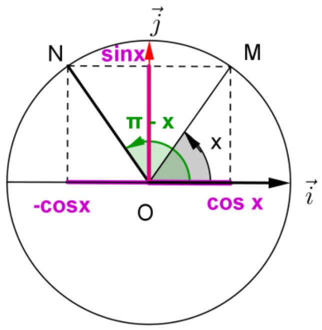
d) Angles associés

Propriété 1 :

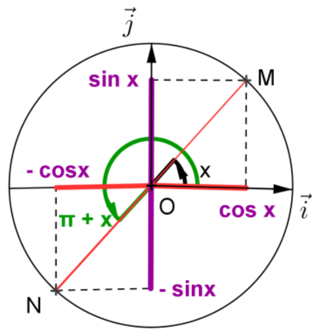
- **cos ($-x$) = cos x**
  sin ($-x$) = -sin x
- **cos ($\pi - x$) = $-$ cos x**
  sin ($\pi - x$) = sin x
- **cos ($\pi + x$) = $-$ cos x**
  sin ($\pi + x$) = $-$ sin x



M et N ont la même abscisse et les ordonnées opposées.



M et N ont la même ordonnée et les abscisses opposées.

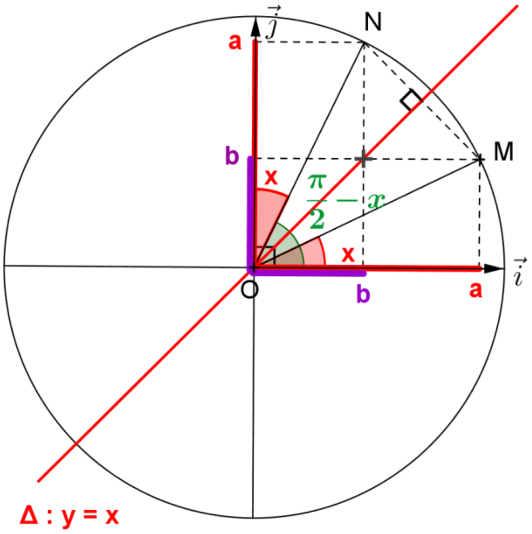


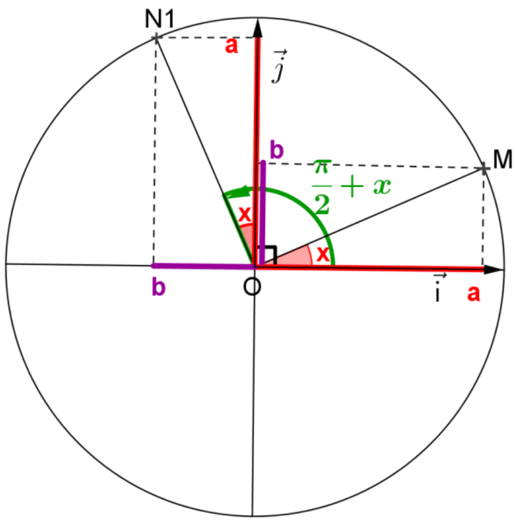
M et N ont les abscisses et les ordonnées opposées.

Démonstration (voir cours de 1ère S : cosinus et sinus d'un nombre réel)

Propriété 2 :

- **cos ($\frac{\pi}{2} - x$) = sin x**
  sin ($\frac{\pi}{2} - x$) = cos x
- **cos ($\frac{\pi}{2} + x$) = $-$ sin x**
  sin ($\frac{\pi}{2} + x$) = cos x





M et N sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$
Leurs coordonnées sont permutées :
L'abscisse de l'un et l'ordonnée de l'autre et vice-versa.

N_1 est le symétrique de N (de la figure ci-contre) par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc : cos ($\frac{\pi}{2} - x$) = b = sin x

sin($\frac{\pi}{2} - x$) = a = cos x

cos ($\frac{\pi}{2} + x$) = - b = -sin x

sin($\frac{\pi}{2} + x$) = a = cos x

3) Equations de la forme cos x = cos a

a est un nombre réel donné.

• Si a est différent de 0 + $k\pi$ alors :

L'ensemble des solutions de l'équation cos x = cos a est :

$S = \{a + 2k\pi\,; -a + 2k'\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\,;\,(k' \in \mathbb{Z})\}$

• Si a =0 (2π) alors : cos x = 1 a pour ensemble de solutions :

S = $\{2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\}$

• Si a = π (2π) alors : cos x = -1 a pour ensemble de solutions :

S = $\{\pi + 2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\}$

Exemple : Résoudre l'équation

Résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ si et seulement si $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ donc

$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,; -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\,;\,(k' \in \mathbb{Z})\right\}$

4) Equations de la forme sin x = sin a

a est un nombre réel donné.

• Si a est différent de $\frac{\pi}{2}$ (2π) ou de $-\frac{\pi}{2}$ (2π) alors :

L'ensemble des solutions de l'équation sin x = sin a est :

$\boldsymbol{S = \{a + 2k\pi\,; \pi - a + 2k'\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z});\ (k' \in \mathbb{Z})\}}$

• Si a $=\frac{\pi}{2}$ (2π) alors : sin x = 1 a pour ensemble de solutions :

S = $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$

• Si a $=-\frac{\pi}{2}$ (2π) alors : sin x = -1 a pour ensemble de solutions :

S = $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$

Exemples :

Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ si et seulement si $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$ donc

$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,; \pi - \frac{\pi}{6} + 2k'\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z});\ (k' \in \mathbb{Z})\right\}$

5) Inéquations $\sin x \leq a$ ou $\cos x \leq a$

Exemple : Résoudre dans $[-\pi\,;\,\pi]$, l'inéquation : $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

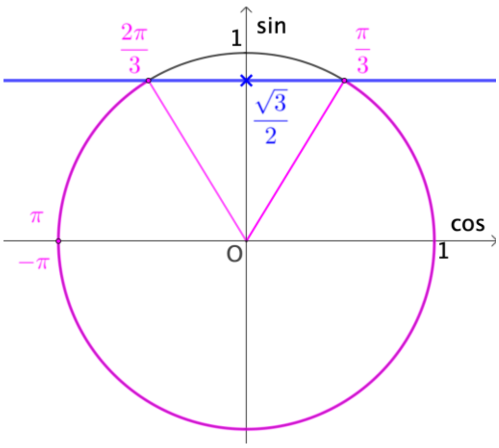
Tout d'abord on commence par résoudre l'équation :

$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

L'ensemble des solutions est :

$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,; \pi - \frac{\pi}{3} + 2k'\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z});\ (k' \in \mathbb{Z})\right\}$

Dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$, les solutions sont $\frac{\pi}{3}$ et $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$



Désormais nous cherchons les valeurs de sinus d'un angle inférieur à $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ces valeurs se situent en dessous des points associés à $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

$S = [-\pi;\,\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi]$

II) Fonctions sinus et cosinus

1) Définitions

• La fonction qui a tout nombre réel x associe le nombre $cos(x)$ est appelée fonction cosinus

• La fonction qui a tout nombre réel x associe le nombre $sin(x)$ est appelée fonction sinus

Remarques :

Pour tout nombre x, $-1 \leq cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq sin(x) \leq 1$

2) Propriétés

• Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, c'est-à-dire que les réels x et $x + 2k\pi$ ont la même image, pour tout x réel et tout k entiers relatifs.

• La fonction cosinus est paire c'est-à-dire que:
pour tout x réel, $cos(-x) = cos(x)$

• La fonction sinus est impaire c'est-à-dire que:
pour tout x réel, $sin(-x) = -sin(x)$

III) Etude des fonctions cosinus et sinus

1) Dérivées

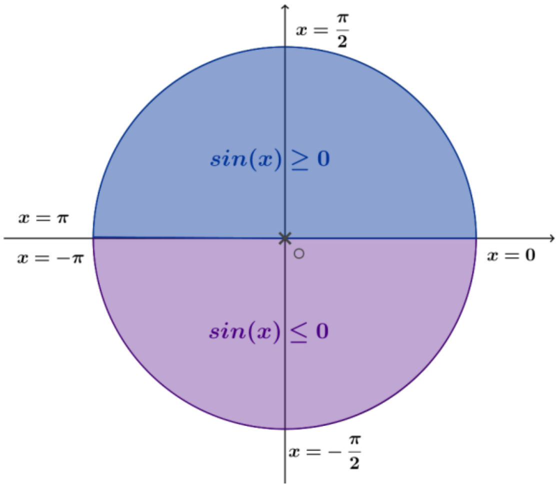
Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x :

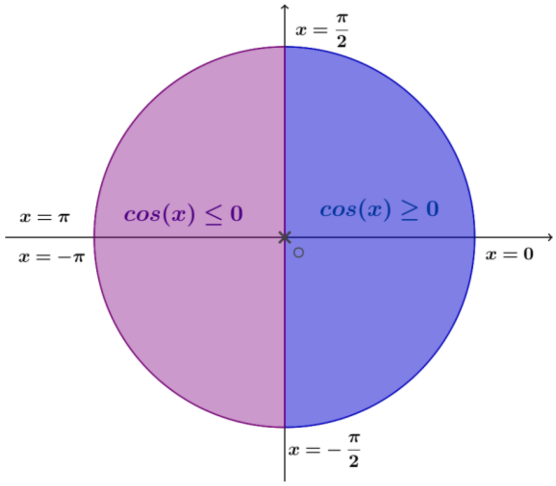
• $sin'(x) = cos(x)$

• $cos'(x) = -sin(x)$

2) Tableau de variation

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π.On choisit l'intervalle]-π ; π] centré en 0.





x	$-\pi$		0		π
Signe de $sin(x)$		$-$	0	$+$	

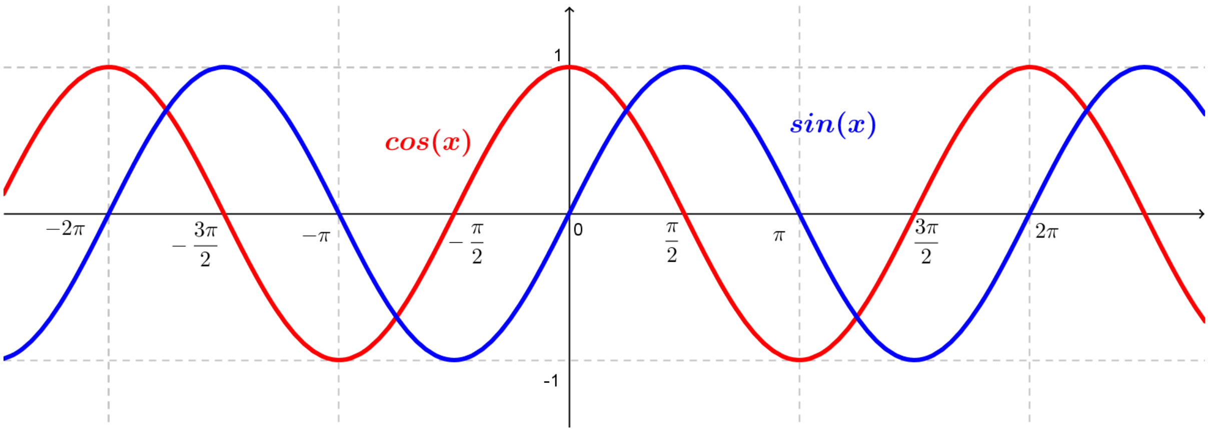
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin'(x) = \cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	$-\pi$		0		π
$cos'(x) = -\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$cos(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	1

3) Courbes représentatives

Voici sur le graphique ci-dessous les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus obtenues à partir des propriétés de parité et de périodicité ainsi que les valeurs remarquables connues, vues dans les paragraphes précédents :



IV) Compléments

Théorème 1:

a et b sont deux nombres réels. Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(ax+b)$ et $g(x) = cos(ax+b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x , $f'(x) = a\,cos(ax+b)$ et $g'(x) = -a\,sin(ax+b)$

Exemples :

$f(x) = sin(4x-2)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4cos(4x-2)$

$g(x) = cos(-5x+3)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 5cos(-5x+3)$

Théorème 2:

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{sin(h)}{h} = 1$$

V) Exemple d'étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$

a. Etudier la parité de f
b. Démontrer que la fonction f est périodique de période π.
c. Etudier les variation de f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
d. Représenter graphiquement la fonction f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et prolonger de part et d'autre la représentation par symétrie et par translation.

Correction :

a. Pour tout $\in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \cos(-2x) - \frac{1}{2} = \cos(2x) - \frac{1}{2} = f(x)$

Donc f est une fonction paire.

b. $f(x+\pi) = \cos(-2(x+\pi)) - \frac{1}{2} = \cos(-2x+2\pi) - \frac{1}{2} = \cos(-2x) - \frac{1}{2} = \cos(2x) - \frac{1}{2} = f(x)$

Donc f est périodique de période π.

c. f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$f(x)$ est de la forme $f(x) = \cos(ax+b)$ sa dérivée est donc $f'(x) = -a\sin(ax+b)$

avec $u(x) = 2x$ *et* $u'(x) = 2$ donc

$f'(x) = -2\sin(2x)$

Lorsque $2x \in [0;\pi]$ c'est-à-dire $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $\sin(2x) \geq 0$ soit $-2\sin(2x) \leq 0$ donc

$f'(x) \leq 0$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, donc f est décroissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$

Le tableau de variation est :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x) = -2\sin(2x)$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$

$$f(0) = \cos(0) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

d. Tout d'abord, nous représentons graphiquement la fonction f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ (en bleu), puis comme la fonction est paire sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, nous complétons ainsi cette représentation graphique sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ (en violet). Nous avons ainsi tracé la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, comme la fonction est périodique de période π nous la complétons en utilisant cette périodicité (en rouge sur le graphique):