Limite et opérations. Limite et comparaison.

I) Limite et opérations

1) Limite d'une somme

Si f a pour limite:	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite:	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f(x)+g(x)$ a pour limite:	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

2) Limite d'un produit

Si f a pour limite:	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\pm\infty$	0
Si g a pour limite:	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
Alors $f(x)\times g(x)$ a pour limite:	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$ **On applique la règle des signes**	**Forme indéterminée**

3) Limite d'un quotient

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$

Si f a pour limite:	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$
Si g a pour limite:	$\ell'\ (\neq 0)$	$+\infty$	$\ell'\ (\neq 0)$	$\pm\infty$
Alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ a pour limite:	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ **On applique la règle des signes**	**Forme indéterminée**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Si f a pour limite:	**$\ell(\neq 0)$ ou ∞**	**0**
Si g a pour limite:	**0**	**0**
Alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ a pour limite:	**$\pm\infty$** **On applique la règle des signes**	**Forme indéterminée**

4) Exemples

Exemple 1: Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par

$f(x) = \dfrac{1}{x^3} + 5$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} + 5 = 0 + 5 = 5$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5}$

Exemple 2 : Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} + \sqrt{x} = 0 + \infty = +\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Exemple 3 : Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ on obtient une forme indéterminée : « $+\infty - \infty$»

Pour ne plus avoir une forme indéterminée, en général, une factorisation suffit, en prenant comme facteur le terme dominant :

Pour $x \neq 0$: $f(x) = x - \sqrt{x} = x\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Comme } \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \text{Comme } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ par conséquent : } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} +\infty \times 1 = +\infty \text{ donc} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \end{array}$$

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Exemple 4 : Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\,;-1\}$ par

$f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + x}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x) = +\infty$ on obtient une forme indéterminée : « $\dfrac{\infty}{\infty}$»

Le numérateur et le dénominateur sont des expressions polynômiales : On factorise le numérateur et le dénominateur par le terme du plus haut degré, qui est x^2 dans les deux cas.

Pour x différent de 0 et de -1 :

$$\frac{2x^2+1}{x^2+x} = \frac{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x^2} = 2$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

$\frac{2}{1} = 2$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 2$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\boldsymbol{f(x)} = \mathbf{2}$

II) Limite et comparaison

On considère f,g et h trois fonctions définies sur un intervalle I ouvert et a un réel tel que a appartient à I ou est une borne de I.

1) Théorème 1

Si pour tout nombre réel x de I,

- **$f(x) \geq g(x)$ et si et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$**
- **$f(x) \geq g(x)$ et si et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$**

Démonstration :

- Montrons tout d'abord que si $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Pour cela il faut prouver que tout intervalle ouvert de la forme] A ; $+\infty$ [contient $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment proche de a.

Soit A un nombre quelconque.

Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors, par définition, l'intervalle]A ; $+\infty$ [contient $g(x)$ pour tous les nombres x suffisamment proches de a.

Donc pour tous les nombres x suffisamment proches de a, $g(x) >$ A

De plus, pour tout x de I $\quad f(x) \geq g(x)$

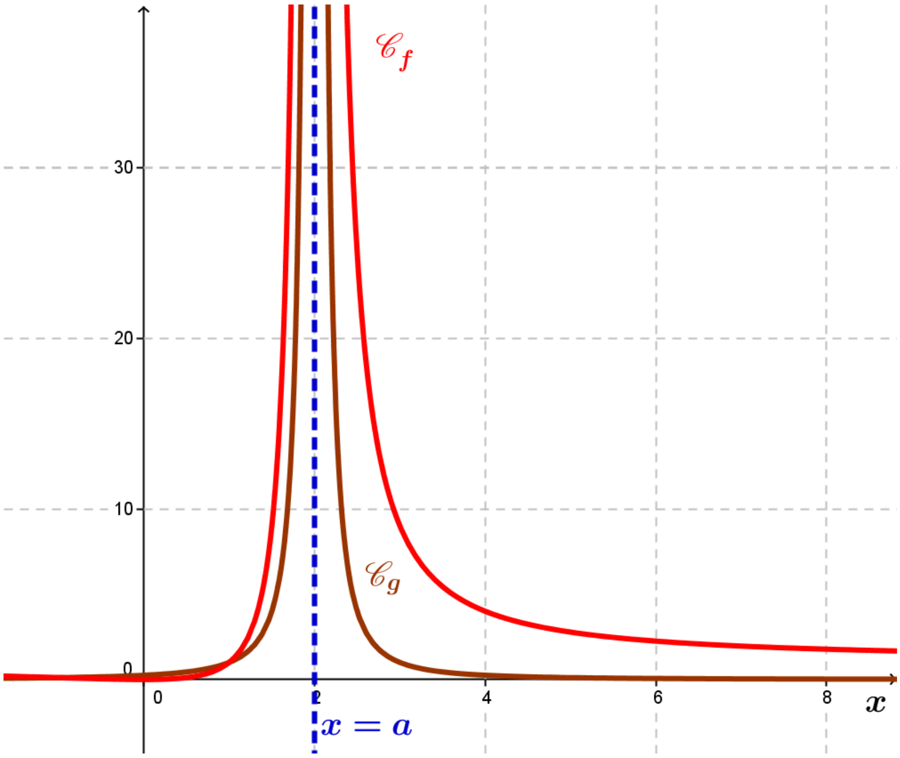
on peut donc écrire que pour tous les nombres x suffisamment proches de ,

$f(x) \geq g(x) >$ A

On en déduit que : pour tous les nombres x suffisamment proches de a, $f(x) >$ A

Ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+a} f(x) = +\boldsymbol{\infty}$

Illustration graphique :



● Maintenant montrons que si $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$.

Pour cela il faut prouver que tout intervalle de la forme $]-\infty\ ;\ A[$ contient $g(x)$ pour tous les nombres x suffisamment proche de a.

Soit A un nombre quelconque.

Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors par définition, l'intervalle $]-\infty\ ;\ A[$ contient $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment proche de a.

Donc pour tous les nombres x suffisamment proches de a, $f(x) < A$

De plus, pour tout x de I $\quad f(x) \geq g(x)$

on peut donc écrire que pour tous les nombres x suffisamment proches de ,

$A > f(x) \geq g(x)$

On en déduit que : pour tous les nombres x suffisamment proches de a, $g(x) < A$

pour tous les nombres x suffisamment proches de a, l'intervalle $]-\infty\ ;\ A[$ contient $g(x)$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to +a} g(x) = -\boldsymbol{\infty}$

2) Exemples

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = x + (cosx)^2$.

Déterminer sa limite en $+\infty$.

Comme $(cos\,x)^2 \geq 0$ alors $x + (cosx)^2 \geq x$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ alors d'après le théorème ci-dessus : $\lim\limits_{x \to +\infty} x + (cosx)^2 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple 2 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = -x^2 - 3\,sin^2 x$.

Déterminer sa limite en $+\infty$.

Comme $-x^2 - 3\,sin^2 x \;.\leq -x^2$ (car $-3\,sin^2 x \leq 0$)

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$ alors d'après le théorème ci-dessus : $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 - 3\,sin^2 x = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2) Théorème d'encadrement dit « des gendarmes »

f, g et h sont trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme :]A ; $+\infty$[ou $\mathbb{R}$. ℓ est un nombre réel.

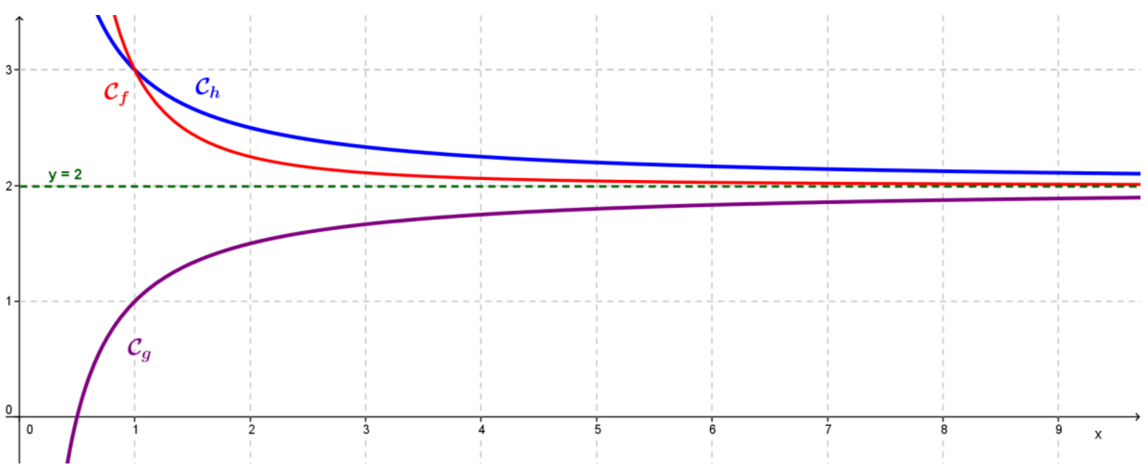
Si pour tout x de I, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si les fonctions g et h ont la même limite ℓ en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

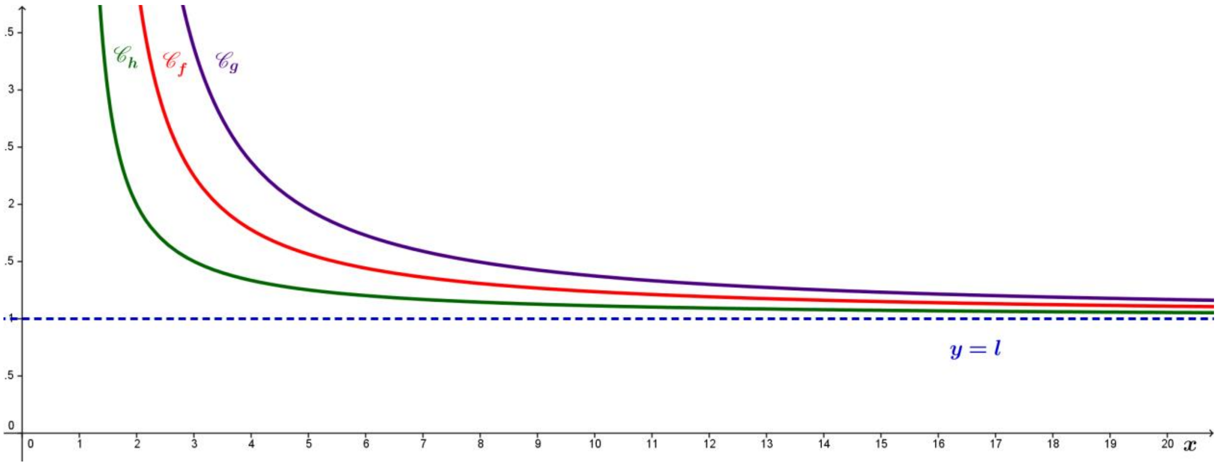
Ce théorème est admis.

Remarque :

Cette propriété assure à la fois l'existence de la limite de f en a et que celle-ci est égale à ℓ

Illustrations graphiques :





Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{sinx}{x}$

Déterminer sa limite en $+\infty$.

Pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad -1 \leq sinx \leq 1$

Donc pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $-\frac{1}{x} \leq \frac{sinx}{x} \leq \frac{1}{x}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ D'après le théorème d'encadrements :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{sinx}{x} = 0$

III) Limite d'une fonction composée

1) Limite de la composée de deux fonctions

f et g sont deux fonctions.

a , b , c désignent soient des nombres soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$

Exemple: $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 3x + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

f est une fonction définie sur un intervalle I.

(v_n) est une suite dont tous les termes appartiennent à l'intervalle I.
b et c désignent soient des nombres soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = b$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = c$

Exemples:

Exemple 1:

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \sqrt{\frac{5n+3}{n+2}}$

On pose $v_n = \frac{5n+3}{n+2}$ pour avoir ainsi : $u_n = f(v_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$

On peut montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5n+3}{n+2} = 5$ et comme $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$

On a alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{5}$

Exemple 2: Cas particulier où $v_n = n$:

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, non nul, par : $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$

En posant : $f(x) = \frac{cosx}{x}$ on a $u_n = f(n)$

Comme $-\frac{1}{x} \leq \frac{cosx}{x} \leq \frac{1}{x}$

alors d'après le théorème « des gendarmes » on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

De là on peut écrire que $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$