Primitive

I) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 2$.

Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x - 7$ et $G(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x + 8$ sont des primitives de f (leur dérivée respective est bien $F'(x) = G'(x) = 5x + 2$)

II) Ensemble des primitives d'une fonction :

1) Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose qu'il existe une primitive F de f sur I.

L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k décrit $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit G une primitive de f sur I. On a donc $G' = F' = f$.

Donc pour tout $x \in I$, on a $(G - F)'(x) = 0$.

Donc la fonction $G - F$ est constante sur l'intervalle I, il existe donc un réel k tel que pour tout $x \in I$, on a $(G - F)(x) = k$ d'où $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Réciproquement soit G la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

On a $G'(x) = F'(x) + 0$ donc $G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ donc G est une primitive de f sur I.

Remarques :

Si la fonction f admet une primitive sur un intervalle I alors elle en admet une infinité.

Soit G et F deux primitives de f sur I tels que $G(x) = F(x) + k$, alors dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de G est obtenue à partir de la courbe représentative de F par translation de vecteur $\vec{j}$.

2) Primitive prenant une valeur donnée en un réel donné :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet des primitives sur I. Soit x_0 et y_0 deux réels tels que $x_0 \in I$.

Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$

Preuve :

La fonction f admet des primitives, soit G une primitive de f.

On considère la fonction F définie par $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$

F est aussi une primitive de f car $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

De plus on a $F(x_0) = G(x_0) - G(x_0) + y_0 = y_0$ **Donc F existe**.

Soit H une autre primitive de f vérifiant $H(x_0) = y_0$.

On sait qu'il existe un réel k tel que $H(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Donc en particulier on a $H(x_0) = F(x_0) + k$ d'où $y_0 = y_0 + k$ donc $k = 0$ donc $H = F$.

La fonction F est donc bien unique.

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$

Déterminer la primitive F de f telle que $F(3) = -5$

On vérifie facilement que les primitives de f sont $F(x) = x^2 + 3x + k$, $k \in \mathbb{R}$

Si on veut $F(3) = -5$ alors $3^2 + 3 \times 3 + k = -5$ d'où $k = -23$

La primitive cherchée est donc $F(x) = x^2 + 3x - 23$

III) Primitives des fonctions usuelles :

Soit C un réel quelconque.

f est définie sur I par $f(x) =$	Les primitives de f sur I sont définies par : $F(x) =$	L'intervalle $I =$
k	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \geq 1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$ln(x) + C$	$]0\,;+\infty[$
$sin(x)$	$-cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$

IV) Primitives et opérations sur les fonctions :

1) Propriétés de linéarité :

Soit F et G des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :

- **$F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I ;**
- **Pour tout réel k, kF est une primitive de la fonction kf sur I.**

2) Exemples :

- Les primitives de $f(x) = 3x^2$ sont $F(x) = 3\,\frac{x^3}{3} + k = x^3 + k$, $k \in \mathbb{R}$
- Les primitives de $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2x$ sont sur $]\,0\,;\,+\infty[$:

  $F(x) = \frac{3}{x} + 5\ln(x) - x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$

3) Primitives et composées de fonctions

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Primitives de f sur I	Condition sur u
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	Aucune condition particulière
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$ln(u)+C$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	$e^u + C$	Aucune condition particulière

Exemples :

Pour chaque fonction f, déterminer ses primitives et en déduire une primitive sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$; $I = \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]1 ; +\infty[$.

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; I =]2 ; +∞[;

d) $f(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$; I =]0 ; +∞[.

Réponses :

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$ en utilisant la formule $\boldsymbol{u'u^n}$ avec $u(x) = x^3 - 1$ et $u'(x) = 3x^2$ on obtient : $f(x) = \frac{3x^2(x^3-1)^5}{3} + C$

$F(x) = \frac{1}{3\times 6}(x^3 - 1)^6 + C$ $\boldsymbol{F(x) = = \frac{1}{18}(x^3 - 1)^6 + C}$

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ en utilisant la formule $\boldsymbol{\frac{u'}{\sqrt{u}}}$ avec $u(x) = x^2 - 1$ $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ on obtient :

$F(x) = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{x^2 - 1} + C$ $\boldsymbol{F(x) = 3\sqrt{x^2 - 1} + C}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ en utilisant la formule $\boldsymbol{\frac{u'}{u}}$ avec $u(x) = x^2 - 4$ et $u'(x) = 2x$

$f(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-4}$ on obtient :

$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2} \ln (x^2 - 4) + C}$

d) $f(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ en utilisant la formule $\boldsymbol{u'e^u}$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $u(x) = -\frac{1}{x^2}$ on obtient :

$\boldsymbol{F(x) = e^{\frac{1}{x}} + C}$