Raisonnement par récurrence

I) Principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé on procède en trois étapes :

• Première étape :

Initialisation : On vérifie que (P_{n_0}) est vraie. C'est-à-dire que la proposition est vraie pour le premier indice $n = n_0$

• Deuxième étape :

Hérédité : On suppose que pour un entier n quelconque ($n \geq n_0$), la proposition (P_n) est vraie, et sous cette hypothèse, dite de récurrence, on démontre qu'alors la proposition (P_{n+1}) est vraie.

On dit alors que la proposition est héréditaire

• Troisième étape :

Conclusion : Lorsque les deux étapes ont été réalisées, on conclut que la proposition (P_n)est vraie pour tout entier naturel n ($n \geq n_0$).

Remarque : Le raisonnement par récurrence repose sur le même principe que la théorie des dominos :

On considère une suite de dominos. Si un domino tombe alors le suivant tombera.

Comme le 1^{er} tombe alors le second tombera, puis le troisième etc …..

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :

1. Initialisation : Prouver que le premier domino tombe.

2. Hérédité : Démontrer que si le nième domino tombe alors le suivant (le n+1 ^{ième} domino) tombera…

3. Conclusion : Si on démontre ces deux points alors la réaction en chaine se déclenche et tous les dominos tomberont !!

En résumé : Si tu donnes l'impulsion de départ (initialisation) et que ta rangée de dominos est bien construite (hérédité) alors toute la rangée tombera. Mais attention, il faut que l'hérédité soit vraie partout. S'il y a ne serait-ce qu'une liaison qui ne fonctionne pas, la destruction totale est fichue.

Dans notre cas, un domino n qui tombe est une propriété ou une formule vraie au rang n.

II) Exemples et méthode

1) Exemple 1:

Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - n \end{cases}$ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$

Soit P_n la propriété : $u_n = 2^n + n + 1$

• **a. Initialisation :** Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$

(Il faut se poser la question a-ton $u_0 = 2^0 + 0 + 1$?)

D'une part $u_0 = 2$

D'autre part $2^0 + 0 + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$

On a bien $u_0 = 2^0 + 0 + 1$ donc P_0 est vraie.

• **b. Hérédité :** Supposons que pour un entier n quelconque fixé on ait P_n vraie c'est-à-dire : $u_n = 2^n + n + 1$ montrons qu'alors P_{n+1} est vraie (c'est-à-dire $u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 2$).

$u_n = 2^n + n + 1$ et

$u_{n+1} = 2u_n - n = 2(2^n + n + 1) - n = 2 \times 2^n + 2n + 2 - n = 2^{n+1} + n + 2$

ce qui implique que P_{n+1} est vraie. On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

• **Conclusion :** De a. et de b., nous pouvons donc conclure que pour tout n de ℕ $u_n = 2^n + n + 1$

2) Exemple 2:

En classe de 1re nous avons admis sans démonstration que :

Pour tout entier n ≥ 1 : S_n = 1 + 2 + …… n = $\frac{n(n+1)}{2}$

En utilisant un raisonnement par récurrence nous pouvons maintenant démontrer cette formule :

Soit pour $n \geq 1$, P_n : S_n = $\frac{n(n+1)}{2}$

• **a. Initialisation :**

Pour $n = 1$, $S_1 = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ on a bien **P_1 vraie pour $n = 1$**

• **b. Hérédité :** Supposons que pour un entier n quelconque fixé ($n \geq 1$) on ait P_n vraie c'est-à-dire :

$S_n = 1 + 2 + \ldots\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$

alors $S_{n+1} = S_n + (n + 1) = 1 + 2 + \ldots\ldots n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 =$

$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ **ce qui implique que P_{n+1} est vraie**

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

• **Conclusion :** De a. et de b., nous pouvons donc conclure que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$\mathbf{1 + 2 + \ldots\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}}$

3) Exemple 3:

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
Soit P_n la propriété : $4^n + 5$ est multiple de 3.

• **a. Initialisation : Vérifions que P_0 est vraie.**

En effet lorsque n = 0 on obtient : $4^0 + 5 = 1 + 5 = 6$ et 6 est bien un multiple de 3.

• **b. Hérédité :** Supposons que pour un entier n quelconque fixé ($n \in \mathbb{N}$) on ait

P_n vraie c'est-à-dire :

$4^n + 5$ est un multiple de 3. Cela veut dire qu'il existe un nombre entier relatif k tel que :

$4^n + 5 = 3k \quad k \in \mathbb{N}$

En multipliant par 4 les deux membres de l'égalité on obtient

$4\ (4^n + 5) = 4 \times 3k \quad k \in \mathbb{N}$

$4^{n+1} + 20 = 12k \quad k \in \mathbb{N}$

$4^{n+1} + 5 + 15 = 12k \quad k \in \mathbb{N}$

$4^{n+1} + 5 = 12k - 15 \quad k \in \mathbb{N}$ en factorisant le membre de droite par 3 on obtient :

$4^{n+1} + 5 = 3(4k - 5) \quad k \in \mathbb{N}$

Ce qui implique que $4^{n+1} + 5$ est bien un multiple de 3.

Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

• **Conclusion :** De a. et de b., nous pouvons donc conclure que pour tout entier naturel n $4^n + 5$ est un multiple de 3.