Suites arithmétiques

I) Définition :

Soit n_0 un nombre un entier naturel

Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite. On dit qu'elle est arithmétique si, partant du

TERME INITIAL u_p, pour passer d'un terme au suivant, on

AJOUTE toujours le même nombre appelé RAISON

Exemple : Pour un abonnement internet illimité, un opérateur propose les prix suivants : 40 € de frais d'établissement de ligne et 30 € par mois d'abonnement.

• Le budget total pour un mois d'abonnement est : 40 + 30 = 70
Le budget total pour un mois d'abonnement est de 70 €

• Le budget total pour deux mois d'abonnement est : 70 + 30 = 100
Le budget total pour deux mois d'abonnement est 100 €

• Le budget total pour trois mois d'abonnement est : 100 + 30 = 130
Le budget total pour un trois d'abonnement est de 130 €

Et ainsi de suite … On additionne 30 au prix du budget total du mois précédent pour obtenir celui du mois suivant.

Soit u_1 le budget total pour un mois d'abonnement : u_1 = 70

u_2 est le budget total pour deux mois d'abonnement : u_2 = u_1 **+ 30** = 70 + 30 = 100

u_3 est le budget total pour trois mois d'abonnement : u_3 = u_2 **+ 30** = 100 + 30 = 130

Soit u_n le budget total pour n mois d'abonnement : u_n = u_{n-1} **+ 30**

Cette suite est arithmétique : On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours par le même nombre (dans notre cas 30)

II) Les deux formules de calculs de termes.

$(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r

Soit $(u_n)_{n\geq p}$ et $n \geq p$, un entier naturel.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur appelée raison :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

On peut obtenir directement la valeur de u_n en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Cas particulier où le 1^{er} rang est 0 :

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarques :

La première formule s'appelle **formule de récurrence**. Elle traduit exactement la définition de suite arithmétique.

En revanche, elle est incommode dans le cas où il s'agit de calculer un terme de rang élevé.

Par exemple, pour calculer u_{28} à partir de u_0, il faut effectuer 28 additions du nombre r .

C'est inefficace !

Il convient dans ce cas d'employer la seconde formule, appelée **formule directe.**

Les deux formules sont équivalentes : toute suite qui, pour tout entier n, vérifie l'une des formules vérifie l'autre.

Voir les démonstrations après les exemples :

Exemples :

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$

1) Justifier que cette suite est arithmétique

2) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 puis u_{23}

3) Calculer u_n en fonction de n

4) A partir de quel rang la suite u est–elle supérieure ou égale à 100 ?

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3$. La suite est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme 1 (Pour passer d'un terme au suivant on ajoute à chaque fois 3).

2) $u_1 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$ $\quad u_1 = 4$
$u_2 = u_1 + 3 = 4 + 3 = 7$ $\quad u_2 = 7$
$u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10$ $\quad u_3 = 10$

On applique la 2ème formule :

$u_{23} = u_0 + 23 \times 3$
$u_{23} = 1 + 23 \times 3 = 70$ $\quad u_{23} = 70$

3) $u_n = U_0 + n \times 3$ $\quad u_n = 1 + 3n$

4) $u_n \geq 100$ en utilisant la question précédente on obtient $1 + 3n \geq 100$

$3n \geq 99$ d'où $n \geq 33$. A partir du terme d'indice 33, $\boldsymbol{u_n}$ est supérieure ou égale à 100

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie sur ℕ , par :

u_{n+1} = u_n - 2 et u_1 = 5

1) Justifier que cette suite est arithmétique

2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à ℕ, u_{n+1} - u_n = -2. La suite est donc arithmétique de raison -2 et de premier terme 5 (Pour passer d'un terme au suivant on ajoute à chaque fois -2).

2) u_2 = u_1 - 2 = 5 - 2 = 3 $\qquad u_2 = 3$
u_3 = u_2 - 2 = 3 - 2 = 1 $\qquad u_3 = 1$
u_4 = u_3 - 2 = 1 - 2 = -1 $\qquad u_4 = -1$

On applique la deuxième formule :

u_{30} = u_1 + (30 – 1) × (-2)

le premier terme de la suite est u_1 au lieu de u_0
La suite a donc un terme de moins donc
la formule est $u_n = u_1 + (n-1)r$

u_{30} = 5 + 29 × (-2) = -53 $\qquad u_{30} = -53$

3) u_n = u_1 +(n - 1) × (-2)

u_n = 5 +(n - 1) × (-2) $\qquad u_n = 7 - 2n$

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur ℕ par u_3 = 4 et u_5 = 12.
Déterminer la raison et le premier terme u_0 de u

Réponse :

u est une suite arithmétique de raison r. Pour tous entiers p et n $(n \geq p)$:

$u_n = u_p + (n-p)$ r

u_5 = u_3 + (5 – 3) r

$12 = 4 + 2r$ donc $\boldsymbol{r = 4}$.

Son premier terme est u_0 : $u_3 = u_0 + 3 \times 4$ on obtient : $12 = u_0 + 12$ donc $\boldsymbol{u_0 = 0}$

La suite arithmétique u a pour raison 4 et a pour 1^er^ terme u_0 = 0

Exemple 4 : Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par u_n = $3n$ + 8
Montrer que u est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme u_0

Réponse :

Pour tout n appartenant à ℕ, u_{n+1} = 3(n+1) + 8 = $3n$ + 3+ 8 = $3n$ + 11
Pour tout n appartenant à ℕ, $u_{n+1} - u_n$ = $3n$ + 11 – $3n$ – 8 = 3

La suite est donc arithmétique de raison 3**.** u_0 = 3×0 + 8 = 8.
Son premier terme est u_0 = 8

III) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite arithmétique de raison r

- **Si r > 0, alors (u_n) est strictement croissante.**
- **Si r < 0, alors (u_n) est strictement décroissante.**
- **Si r = 0, alors (u_n) est constante.**

Exemples :

Exemple 1 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = 1$

Réponse :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 3$

Donc $u_{n+1} - u_n = 3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Exemple 2 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par :

$u_{n+1} = u_n - 2$ et $u_1 = 5$

Réponse :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - 2$
Donc $u_{n+1} - u_n = -2$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n < 0$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante

IV) Somme des termes d'une suite arithmétique

1) Somme des entiers de 1 à n

Propriété :

Pour tout entier naturel non nul:

$$\mathbf{1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Cette formule a été proposée par Gauss à l'âge de 11 ans !

Exemple : Calculer S = 1 + 2 + 3 ...+ 10

S= 1 + 2 + 3 ...+ 10 = $\frac{10 \times 11}{2}$ = 55 **S = 55**

2) Somme des termes d'une suite arithmétique:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r alors :

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} .... + u_n = \sum_{i=p}^{n} u_i = \text{nombre de terme} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Cas particulier :

$$u_0 + u_1 + u_2 .... + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = (n+1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

$$u_1 + u_2 .... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = n \times \left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right)$$

Exemple 1 : Soit $u_n = 7n - 1$

Calculer $u_1 + u_2 .... + u_{10}$

$u_{n+1} - u_n = 7(n+1) - 1 - 7n + 1 = 7n + 7 - 1 - 7n + 1 = 7$

(u_n) est une suite arithmétique de raison 7 et le premier terme est 6.

$u_1 + u_2 .... + u_{10} = 10 \times \left(\frac{u_1 + u_{10}}{2}\right) = 10 \times \left(\frac{6 + 69}{2}\right) = 10 \times \left(\frac{75}{2}\right) = 375$

Exemple 2 : u_n est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 3$

Calculer $u_0 + u_1 .... + u_{10}$

$u_0 = 3$ et $u_{10} = u_0 + 10r = 3 + 10 \times (-2) = 3 - 20 = -17$

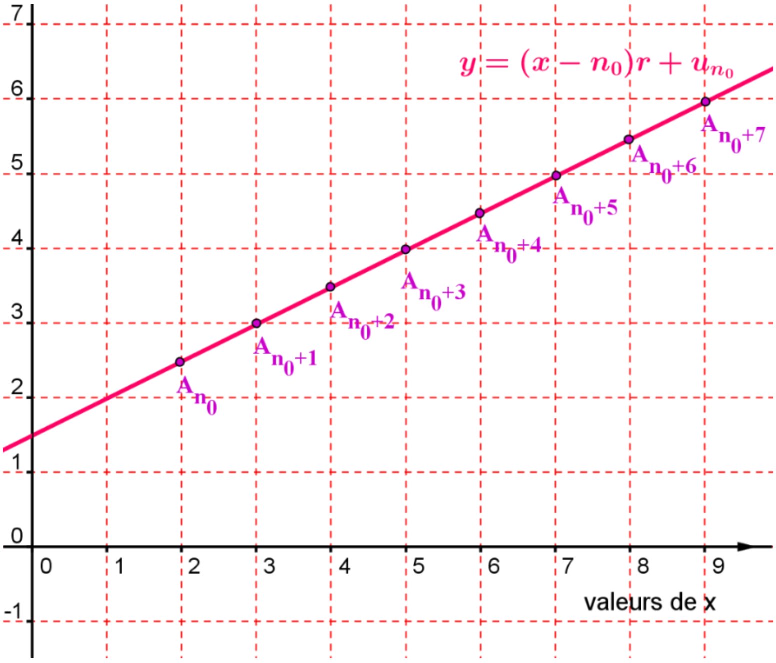
$u_0 + u_1 .... + u_{10} = 11 \times \left(\frac{u_0 + u_{10}}{2}\right) = 11 \times \left(\frac{3-17}{2}\right) = 11 \times (-7) = -77$

V) Graphique

La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de points alignés, et cela la caractérise.

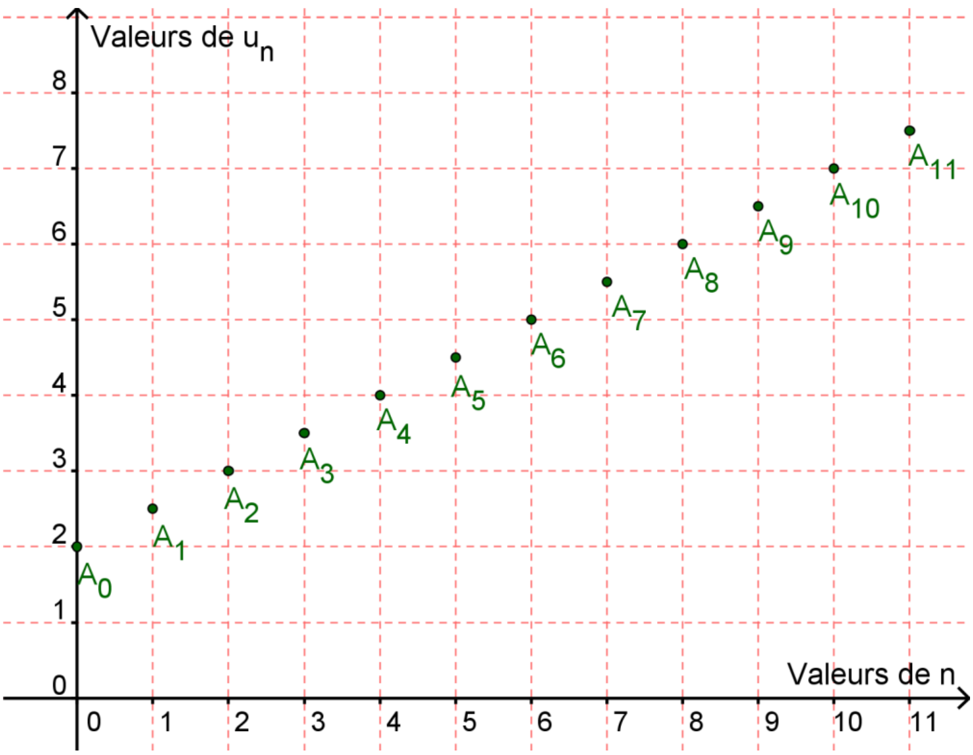
Si les points de la représentation graphique d'une suite sont alignés, alors c'est une suite arithmétique.

De plus, le coefficient directeur de la droite sur laquelle les points sont alignés est la raison de la suite arithmétique.



Exemples :

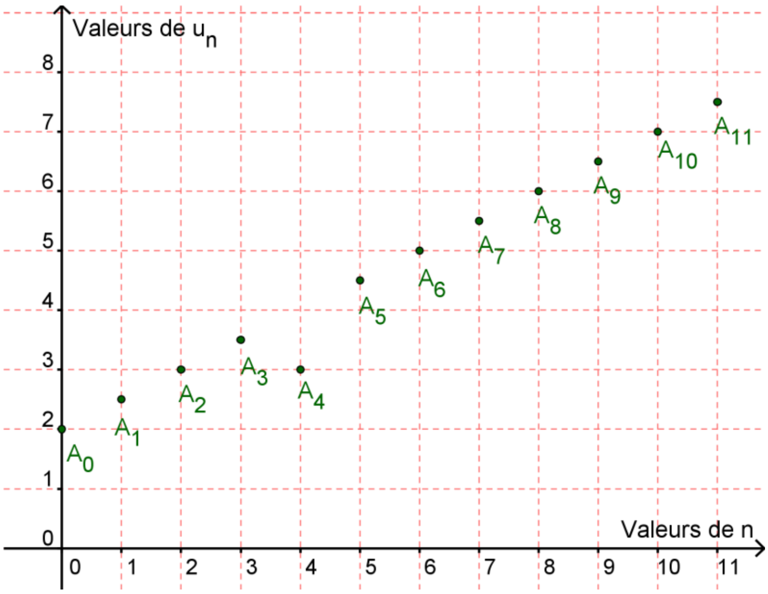
Exemple 1 :



Ce dessin montre les douze premiers points du graphique d'une suite qui peut être arithmétique. En effet, prenons deux abscisses consécutives n et $n+1$, où n est un entier compris entre 0 et 10, la différence des ordonnées de A_{n+1} et de A_n vaut $0{,}5$.

On peut traduire cela par la formule $u_{n+1} - u_n = 0{,}5$. La suite peut donc être arithmétique de raison $0{,}5$.

Exemple 2 :



Ce dessin montre les douze premiers points du graphique d'une suite qui ne peut pas être arithmétique. En effet, prenons deux abscisses consécutives n et $n+1$, où n est un entier compris entre 0 et 10, la différence des ordonnées de A_{n+1} et de A_n vaut $0{,}5$, sauf dans deux cas : pour $n = 3$ et $n = 4$.

On a donc $u_{n+1} - u_n = 0{,}5$ pour $n \neq 3$ et $n \neq 4$, et $u_4 - u_3 = -0{,}5$ et $u_5 - u_4 = 1{,}5$.

Ces valeurs n'étant pas les mêmes, on peut affirmer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Attention ! Sur ces graphiques, relier les points isolés n'a pas de sens !

VI) Limites des suites arithmétiques

Toute suite arithmétique de raison $r \neq 0$ est divergente.

	$r < 0$	$r > 0$
$u_0 > 0$	$-\infty$	$+\infty$
$u_0 < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Exemples :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 3$ a pour limite $-\infty$

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3$ a pour limite $+\infty$