Etude de suites aritmético-géométriques : $u_{n+1} = au_n + b$

Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence de la forme u_{n+1} = au_n + b où a et b sont deux réels, $a \neq 0$.

Lorsque $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique.

Lorsque $b = 0$, (u_n) est une suite géométrique.

Dès que l'on travaille sur des suites arithmético-géométriques la méthode est toujours la même :

Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = au_n + b$ et u_0 donné :

• Il faut trouver le nombre c telle que la suite $v_n = u_n - c$ soit géométrique.

En général c est la solution de l'équation $f(x) = x$ avec $f(x) = ax + b$

• On détermine la raison q et le premier terme.

• On exprime v_n en fonction de n : $v_n = v_0 \times q^n$, puis on en déduit u_n en fonction de n :

$u_n = v_0 \times q^n + c$

• On en déduit ainsi la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$:

Si 0< q <1 la limite est c

Si q > 1 la limite est infinie

1) Exemple 1: cas où la limite est finie :

Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1$

1a. A l'aide d'un tableur, calculez les vingt premiers termes de la suite (u_n).Quelle conjecture peut-on faire concernant la limite (u_n) ?

1b. Résoudre l'équation $f(x) = x$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$

2a. Calculer la valeur exacte des trois premiers termes de la suite (v_n).

2b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

2c. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

3. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Réponse:

1.a. A l'aide d'un tableur nous obtenons les résultats suivants :

u0	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7	u8	u9	u10	u11	u12	u13	u14	u15
1	1,5	1,75	1,875	1,9375	1,9688	1,984375	1,9922	1,99609	1,99805	1,99902	1,999512	1,99976	1,99988	1,99994	1,99996

Il semblerait que la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞ soit 2.

1.b. Résoudre l'équation $f(x) = x$

$x = \frac{1}{2}x + 1$ ssi

$x - \frac{1}{2}x = 1$ ssi

$\frac{1}{2}x = 1$ ssi

$x = 2$ donc S={2} (on sait que la suite $v_n = u_n - 2$ sera une suite géométrique et sera utilisée comme suite intermédiaire)

2.a.

$u_0 = 1$ donc $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$

$u_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ donc $v_1 = u_1 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}$ donc $v_2 = u_2 - 2 = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4}$

La suite (v_n) semble être géométrique. Nous allons le prouver dans la question suivante :

2b. pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$

pour tout entier naturel n :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1$

Donc pour tout entier naturel n : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n - 1}{u_n - 2} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 2)}{u_n - 2} = \frac{1}{2}$

La suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme -1.

2c. De la question précédente, on en déduit que pour tout entier naturel n :

$\boldsymbol{v_n} = (-1) \times (\frac{1}{2})^n = -(\frac{1}{2})^n$ et comme $u_n = v_n + 2$

On en déduit alors, que pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{u_n = -(\frac{1}{2})^n + 2}$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$

2) Exemple 2: cas où la limite est infinie:

Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = 1{,}5\ u_n - 1$

1. A l'aide d'un tableur, calculez les vingt premiers termes de la suite (u_n).Comment semble se comporter la suite (u_n) en $+\infty$?

2. Déterminer la solution de l'équation $1{,}5x - 1 = x$

3. On considère alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$

3a. Calculer la valeur exacte des trois premiers termes de la suite (v_n).

3b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

3c. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Réponse:

1.

u0	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7	u8	u9	u10	u11	u12	u13	u14	u15
1	0,5	-0,25	-1,375	-3,063	-5,594	-9,39063	-15,09	-23,629	-36,443	-55,665	-84,4976	-127,75	-192,62	-289,93	-435,89

Il semblerait que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$

2. $1{,}5x - 1 = x$

$0{,}5x = 1$

$x = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$

La solution de l'équation $\mathbf{1,5x - 1 = x}$ est 2.

3 a. $u_0 = 1$ donc $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$

$u_1 = 0{,}5$ donc $v_1 = u_1 - 2 = 0{,}5 - 2 = -1{,}5$

$u_2 = -0{,}25$ donc $v_2 = u_2 - 2 = -0{,}25 - 2 = -2{,}25$

3 b. pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$

pour tout entier naturel n :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 1{,}5\ u_n - 1 - 2 = 1{,}5\ u_n - 3$

Donc pour tout entier naturel n : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1{,}5\ u_n - 3}{u_n - 2} = \dfrac{1{,}5\ (u_n - 2)}{u_n - 2} = 1{,}5$

La suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme -1.

3 c. De la question précédente, on en déduit que pour tout entier naturel n :

$\boldsymbol{v_n} = (-1) \times (1{,}5)^n = -(\mathbf{1,5})^{\boldsymbol{n}}$

$u_n = v_n + 2$

On en déduit alors, que pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{u_n} = -(\mathbf{1,5})^{\boldsymbol{n}} + \mathbf{2}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbf{1,5})^{\boldsymbol{n}} = +\boldsymbol{\infty}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -(\mathbf{1,5})^{\boldsymbol{n}} = -\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n} = -\boldsymbol{\infty}$

3) Exemple où la suite est divergente sans limite

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n + 3$

1. A l'aide d'un tableur déterminer les vingt premiers termes de la suite. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

2. a. Sur un même graphique, dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie par $f(x) = -2x + 3$ et la droite (d) d'équation $y = x$

b. Tracer graphiquement les quatre premiers de la suite.

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$. Notons α cette solution

4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - \alpha$

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique

b. En déduire (v_n) en fonction de n

c. En déduire (u_n) en fonction de n.

d. Que peut-on en déduire quant à la limite de cette suite ?

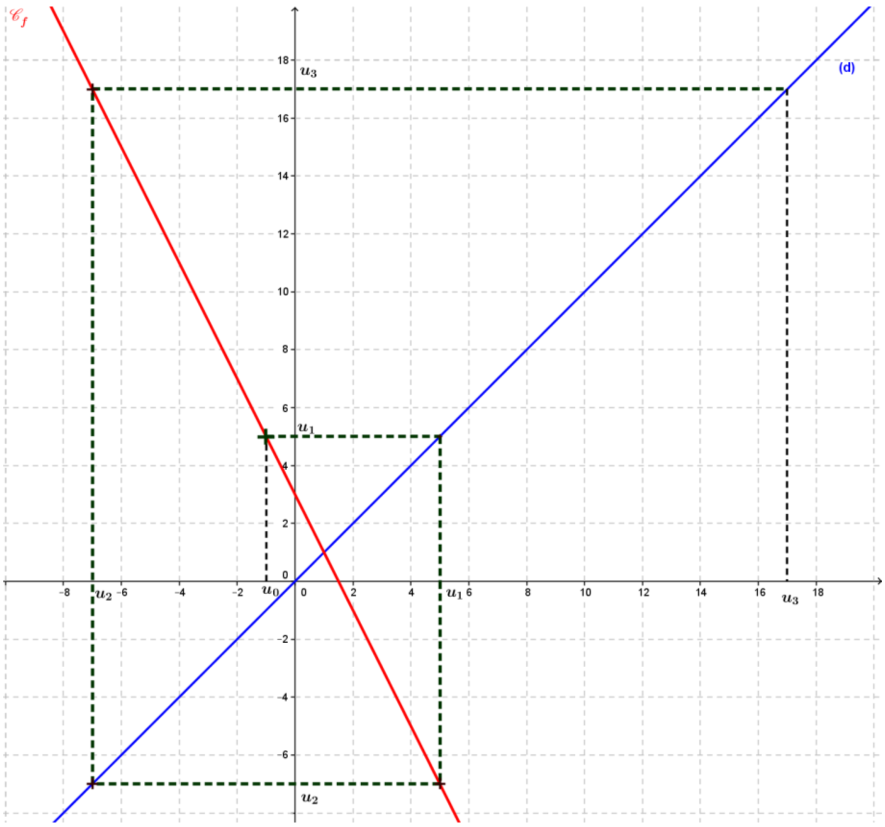
Réponse :

1.

u0	u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7	u8	u9	u10	u11	u12	u13	u14	u15
-1	5	-7	17	-31	65	-127	257	-511	1025	-2047	4097	-8191	16385	-32767	65537

2.a et b

La suite (u_n) ne semble pas avoir de limite.



Graphiquement nous voyons que la suite (u_n) n'a pas de limite.

3.

$f(x) = -2x+3$ donc résoudre l'équation $f(x) = x$ revient à résoudre l'équation :

$-2x+3=x$ est équivalent à : $-3x=-3$ donc $x=1$

L'équation $f(x) = x$ a pour solution $\alpha = 1$

4.a. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1$

donc pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 3 - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1) = -2v_n$

Donc pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -2v_n$. Ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison -2.

4.b. $v_0 = u_0 - 1 = -2$

Donc pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{v_n = -2 \times (-2)^n}$

4.c. pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1$ ce qui est équivalent à : $u_n = v_n + 1$

Donc pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = -2 \times (-2)^n + 1}$

4.d. $(-2)^n$ n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$, car cette suite est alternée (voir le cours sur les limites des suites géométriques), donc **la suite (u_n) n'a pas de limite en $+\infty$.**