Suites géométriques

I) Définition

Soit n_0 est un nombre entier naturel.

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite. On dit qu'elle est géométrique si, partant du

TERME INITIAL u_p , pour passer d'un terme au suivant, on

MULTIPLIE toujours par le même nombre appelé RAISON

Exemple : Une voiture, achetée neuve qui coûtait 20 000 € en 2008, perd chaque année 20% de sa valeur.

• Au bout d'un an : la voiture coûtait 20% moins cher :

20 000 × (1 - $\frac{20}{100}$) = 20 000 × **0,8** = 16 000. En 2009 la voiture coûtera 16 000 €.

• Au bout de deux ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur :

16 000 × (1 - $\frac{20}{100}$) = 16 000 × **0,8** = 12 800. En 2010 la voiture coûtait 12 800 €.

• Au bout de trois ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur :

12 800 × (1 - $\frac{20}{100}$) = 12 800 × **0,8** = 10 240. En 2011 la voiture coûtait 10 240.€.

Et ainsi de suite … on multiplie la valeur de la voiture de l'année précédente par 0,8 pour obtenir celle de l'année suivante.

Soit u_0 la valeur de la voiture en 2008. u_0 = 20 000

u_1 est la valeur de la voiture au bout d'un an c'est-à-dire u_1 = u_0 × **0,8** = 16 000

u_2 est la valeur de la voiture au bout de deux ans c'est-à-dire u_2 = u_1 × **0,8** = 12 800

Soit u_n la valeur de la voiture au bout de n années, u_n = u_{n-1} × **0,8**

Cette suite est géométrique : On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours pas le même nombre (dans notre cas 0,8)

II) Calculs de termes.

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q

Soit $(u_n)_{n \geq p}$, une suite, et n un entier naturel supérieur ou égal à p ,

on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur q appelée raison:

$$u_{n+1} = u_n \times \mathbf{q}$$

On peut obtenir directement la valeur de u_n à partir de celle de u_p en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_p \times q^{(n-\mathrm{p})}$$

Cas particulier où le 1er rang est 0 : $u_n = u_0 \times q^n$

<u>Remarques :</u>

La première formule s'appelle **formule de récurrence**. Elle traduit exactement la définition de suite géométrique.

En revanche, elle est incommode dans le cas où il s'agit de calculer un terme de rang élevé.

Par exemple, pour calculer u_{28} à partir de u_0, il faut effectuer 28 multiplications par le nombre r .

C'est inefficace !

Il convient dans ce cas d'employer la seconde formule, appelée **formule directe.**

Les deux formules sont équivalentes : toute suite qui, pour tout entier n, vérifie l'une des formules vérifie l'autre.

Exemples :

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_1; u_2 ; u_3 puis u_{15}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par 3, la suite est donc géométrique de raison 3 et de premier terme 2.

2) $u_1 = u_0 \times 3 = 2 \times 3 = 6$ — $u_1 = 6$

$u_2 = u_1 \times 3 = 6 \times 3 = 18$ — $u_2 = 18$

$u_3 = u_2 \times 3 = 18 \times 3 = 54$ — $u_3 = 54$

On applique la $2^{ème}$ formule :

$u_{15} = u_0 \times 3^{15}$

$u_{15} = 2 \times 3^{15}$ — $u_{15} = 28\ 697\ 814$

3) $u_n = u_0 \times 3^n$ — $u_n = 2 \times 3^n$

Exemple 2 : Soit la suite (u_n) définie par :

$\boldsymbol{u_{n+1}} = \dfrac{u_n}{2}$ et $u_1 = 3$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par $\frac{1}{2}$.La suite est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 3.

2) $u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $u_2 = 1{,}5$

$u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$ $u_3 = 0{,}75$

$u_4 = \frac{u_3}{2} = \frac{0{,}75}{2} = 0{,}75$ $u_4 = 0{,}375$

On applique la 2ème formule :

$u_{30} = u_1 \times (\frac{1}{2})^{30-1}$

le 1er terme de la suite est u_1 au lieu de u_0
La suite a donc un terme de moins donc
la formule est $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

$u_{30} = 3 \times (\frac{1}{2})^{29}$ $u_{30} = \frac{3}{2^{29}}$

3) $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$ $u_n = \frac{3}{2^{n-1}}$

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_3 = 4$ et $u_6 = 32$.
Déterminer la raison et le premier terme u_0 de u

Réponse :

u est une suite géométrique de raison q. Pour tous entiers m et n :

$u_n = u_m \times q^{(n-m)}$

$u_6 = u_3 \times q^{(6-3)}$

$32 = 4 \times q^3$ donc $q^3 = 8$. Donc $q = 2$

Son premier terme est u_0 : $u_3 = u_0 \times q^3$

on obtient : $4 = u_0 \times 2^3$ Donc $u_0 = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}$.

La suite géométrique u a pour raison 2 et a pour premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$

Exemple 4 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n}$

1.Montrer que pour tout entier n, $u_n = 5 \times (\frac{5}{4})^n$

2.Montrer que u est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0

Réponse :

1. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n} = \frac{5 \times 5^n}{4^n} = 5 \times \frac{5^n}{4^n} = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$

2.Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} = 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n \times \frac{5}{4} = u_n \times \frac{5}{4}$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{5}{4}$. $\qquad u_0 = \frac{5^1}{4^0} = \frac{5}{1}$

Son premier terme est $u_0 = 5$

Démonstration de l'équivalence des deux formules:

• Cas particulier où le premier rang est 0 :

- Tout d'abord montrons que si $u_n = u_0 \times q^n$ **alors** $u_{n+1} = u_n \times q$

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite telle qu'il existe un réel q non nul, tel que pour tout entier naturel n:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$ donc $u_{n+1} = u_0 \times q^n \times q = q \times u_n$, donc $u_{n+1} = u_n \times q$.

- **Montrons maintenant la réciproque qui est** :

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite telle qu'il existe un réel q non nul, tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$ alors $u_n = u_0 \times q^n$

$(u_0 \neq 0)$ et (q $\neq 0)$ ainsi aucun u_n n'est nul.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_0 \times q \\ u_2 = u_1 \times q \\ u_3 = u_2 \times q \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} = u_{n-2} \times q \\ u_n = u_{n-1} \times q \end{array}\right\} \text{n lignes}$$

en multipliant membre à membre ces n égalités ci-contre on obtient :

$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = u_0 \times q \times u_1 \times q \ldots \times u_{n-1} \times q$

On constate que les termes se simplifient deux à deux sauf deux (u_0 et u_n) et on obtient pour tout entier naturel n:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

• Cas général où le premier rang est n_0 :

Si la suite (u_n) est définie à partir du rang p, alors on étudie la suite (v_n) définie par :

$v_n = u_{n+p}$ dans ce cas $v_0 = u_p$ ainsi on se ramène au cas précédent.

III) Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite géométrique de raison q ($q > 0$) et de 1er terme u_p :

	$0 < q < 1$	$q > 1$	$q = 1$
$u_p > 0$	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est constante.
$u_p < 0$	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est constante.
$u_p = 0$	(u_n) est une suite nulle		

Exemples :

Exemple 1 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $3 > 1$

La suite (u_n) est donc croissante.

Exemple 2 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1} = u_n \times 3$ et $u_0 = -2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 3$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $3 > 1$ mais $u_0 = -2 < 0$

La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est donc décroissante.

Exemple 3 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$ et $u_0 = 2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0 < \frac{1}{2} < 1$ et $u_0 > 0$

La suite (u_n) est donc décroissante.

IV) Somme des termes d'une suite géométrique

1) Somme des puissances successives d'un nombre réel

Propriété :

Pour tout entier naturel non nul et $q \neq 1$:

$$\mathbf{1 + q + q^2 .... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Exemple : Calculer S = 1 +10 + 10² + ...+ 10^5

S = 1 +10 + 10² + ...+ $10^5 = \frac{1-10^{5+1}}{1-10} = \frac{1-10^6}{1-10} = \frac{1-1\,000\,000}{1-10} = \frac{-999\,999}{-9} =$ 111 111

S =111 111

2) Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q alors :

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} .... + u_n = \sum_{i=p}^{n} u_i = premier\ terme \times \frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$$

Cas particulier :

$$u_0 + u_1 + u_2 .... + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$u_1 + u_2 .... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 \times \frac{1-q^{n}}{1-q}$$

Exemple : Soit $u_n = 5 \times (\frac{1}{2})^n$

Calculer $u_1 + u_2 .... + u_{10}$

Solution :

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_1 = \frac{5}{2}$

de u_1 à u_{10} il y a 10 termes on a donc :

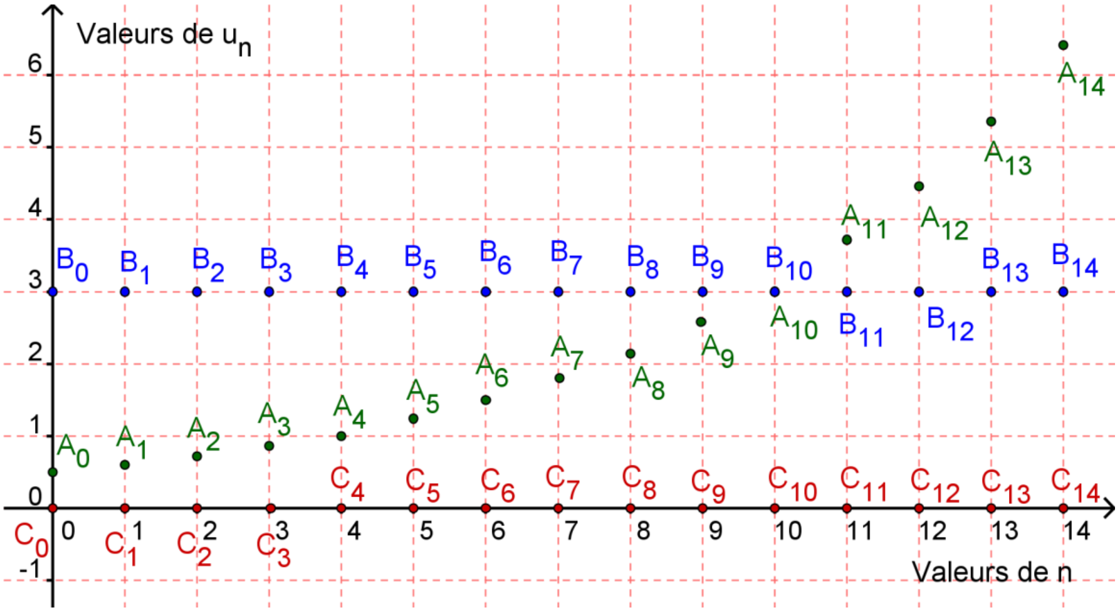
$$u_1 + u_2 .... + u_{10} = u_1 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-(\frac{1}{2})} = \frac{5}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \times 2 \times (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= 5 \times (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 4{,}995$$

V) Exemple de graphique

Exemples :

Si $r = 1$ ou si $u_0 = 0$, alors les points du graphique sont alignés, sur la droite d'équation $y = u_0$ (**voir points rouges** ci-dessous pour $u_0 = 0$ et **les points bleus** pour $r = 1$ et $u_0 = 3$).
Les points verts ci-dessous sont les premiers points de la représentation graphique de la suite géométrique de raison $1{,}2$ et de terme initial $u_0 = 0{,}5$.



VI) Limites des suites géométriques

(u_n) est une suite géométrique de raison q non nulle. Pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$.

1) Tableau récapitulatif des limites d'une suite géométrique

Théorème :

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q > 1$
$u_0 > 0$	**Pas de limite**	**Converge vers 0**	$+\infty$
$u_0 < 0$			$-\infty$

2) Cas particuliers :

- Si $q = 0$ alors $u_n = 0$ pour $n \geq 1$
- Si $q = 1$ alors $u_n = u_0$ pour $n \geq 1$

3) Exemples

Exemple 1 :

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -6$ et $u_{n+1} = 5\ u_n$.
$u_0 = -6$ et $q = 5$ comme $u_0 < 0$ et $q > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple 2 :

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$
$u_0 = 7$ et $q = \frac{1}{3}$, comme $u_0 > 0$ $\ -1 < q < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exemple 3 :

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (S_n) définie par :

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^n}$

Réponse :

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$

On observe que S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ on a donc :

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 1$ **et donc :** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$

4) Démonstration

(u_n) est une suite géométrique de raison q non nulle. Pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$

◇ Cas où $q > 1$

Si $q > 1$ alors il existe un réel a strictement positif tel que $q = 1 + a$

$q^0 = 1$

$q^1 = 1 + a$

$q^2 = (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 \geq 1 + 2a$

$q^3 = (1+a)^3\ 1 + 3a + 3a^2 + a^3 \geq 1 + 3a$

etc …

En observant les résultats des premiers termes, nous remarquons que $q^n \geq 1 + na$

Montrons par récurrence que nous avons effectivement : $q^n \geq 1 + na$ pour tout entier naturel n. Notons P_n cette propriété.

• **P_0 est vraie.** En effet lorsque $n = 0$ on obtient :

$q^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$

• Supposons que pour **un entier n** quelconque **fixé** on ait P_n vraie c'est-à-dire :

$q^n \geq 1 + na$

alors $q \times q^n \geq q(1 + na)$

par conséquent : $q^{n+1} \geq q(1 + na) \geq (1 + a)(1 + na)$

Comme $(1 + a)(1 + na) = 1 + na + a + a^2 \geq 1 + na + a$ et comme $1 + na + a = 1 + (n + 1)a$

alors : $q^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$

ce qui implique que P_{n+1} est vraie.

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que **la proposition est vraie pour tout entier naturel n**

• **Donc pour tout entier naturel n, $q^n \geq 1 + na$**

Le nombre a étant strictement positif, $\lim_{n \to +\infty} (na) = +\infty$ **donc** $\lim_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$

alors le théorème de comparaison permet de conclure que : $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Conclusion : Pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$:

Si $u_0 > 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Si $u_0 < 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

◇ Cas où -1 < q < 1 et $q \neq 0$

on pose : $p = \frac{1}{q}$

• Si 0 < q < 1 alors $\frac{1}{q} > 1$ **donc $p > 1$**

Nous venons de démontrer que si $p > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} p^n = +\infty$ **, le nombre p étant non nul**

Donc $\lim_{n \to +\infty} p^n = +\infty$ **, donc** $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p^n} = 0$ **donc** $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

• Si -1 < q < 0 On pose $p = |q|$ et dans ce cas 0 < p < 1, d'après le résultat précédent :

$\lim_{n \to +\infty} p^n = 0$ **donc** $\lim_{n \to +\infty} |q|^n = 0$ **donc** $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

◇ Cas où $q \leq$ -1 Lorsque $q \leq -1$, la suite est alternée elle n'a donc pas de limite

Exemple : si $q = -1$, pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$

$u_1 = -u_0$ $u_2 = u_0$ $u_3 = -u_0$ $u_4 = u_0$

Plus généralement : si n est impair : $u_n = -u_0$ et si n est pair : $u_n = u_0$

Cette suite ne peut donc avoir de limite.