

Tableau de dérivées

I) Dérivées des fonctions usuelles.

<i>Fonction f :</i>	<i>Dérivable sur:</i>	<i>Fonction dérivée f' :</i>
$f(x) = k (k \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$] - \infty ; 0[\cup] 0 ; + \infty [$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0 ; + \infty [$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sin(x)$	\mathbb{R}	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	\mathbb{R}	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	\mathbb{R}	$f'(x) = e^x$

II) Dérivées et opérations

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel on a :

Fonction	Dérivée
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$\lambda u(x)$	$\lambda u'(x)$
$u(x) v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$u(x)^n$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\frac{1}{u(x)^n}$	$-\frac{n \times u'(x)}{u^{n+1}(x)}$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$

Exemples :

- **Exemple 1** : Calculer la dérivée de la fonction f

$$f(x) = \frac{x^2+5x+2}{2x-3} \quad \text{Pour } x \neq \frac{3}{2} \quad f(x) = \frac{u}{v}$$

$$u(x) = x^2 + 5x + 2 \text{ donc } u'(x) = 2x + 5$$

$$v(x) = 2x - 3 \text{ donc } v'(x) = 2$$

Pour tout $x \neq \frac{3}{2}$:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x+5)(2x-3) - 2(x^2+5x+2)}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2 - 6x + 10x - 15 - 2x^2 - 10x - 4}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 19}{(2x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x - 19}{(2x-3)^2}$$

Donc f' est la fonction définie sur $] -\infty ; \frac{3}{2}[\cup] \frac{3}{2} ; +\infty[$ par : $f'(x) = \frac{2x^2 - 6x - 19}{(2x-3)^2}$

- **Exemple 2** : Calculer la dérivée de la fonction g :

$$g(x) = (2x + 5)(6x - 2) \quad \text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} :$$

$$g(x) = uv \quad \text{avec :}$$

$$u(x) = 2x + 5 \text{ donc } u'(x) = 2$$

$$v(x) = 6x - 2 \text{ donc } v'(x) = 6$$

Pour tout x de \mathbb{R} :

$$g'(x) = u'v + uv' = 2(6x - 2) + 6(2x + 5) = 12x - 4 + 12x + 30 = 24x + 26$$

Donc g' est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g'(x) = 24x + 26$

- **Exemple 3** : Calculer la dérivée de la fonction i :

$$i(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 4}$$

$x^2 - 2x + 4 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} car $\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 < 0$ donc pour tout x de \mathbb{R} : $x^2 - 2x + 4 \neq 0$

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} : i(x) = \frac{1}{u}$$

$$u(x) = x^2 - 2x + 4 \text{ donc } u'(x) = 2x - 2$$

Pour tout x de \mathbb{R} :

$$i'(x) = \frac{-u'}{u^2} = \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+4)^2} = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$$

$$i'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$$

Donc i' est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $i'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$

Exemple 4 : Calculer la dérivée de la fonction f :

$$f(x) = \ln(3x + 6) \quad 3x + 6 > 0 \text{ pour } x > -2$$

f est définie et dérivable sur $]-2 ; +\infty [$

Pour $x \in]-2 ; +\infty [$ $f(x) = \ln(u(x))$

$$u(x) = 3x + 6 \text{ donc } u'(x) = 3$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x+6}$$

Donc f est dérivable sur $]-2 ; +\infty [$ et $f'(x) = \frac{3}{3x+6}$

Exemple 5 : Calculer la dérivée de la fonction f :

$$f(x) = e^{5x}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^u$

$$u(x) = 5x \text{ donc } u'(x) = 5$$

$$f'(x) = u'e^u \text{ donc } f'(x) = 5e^{5x}$$

Donc f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 5e^{5x}$

Exemple 6 : Calculer la dérivée de la fonction f :

$$f(x) = (3x - 2)e^{2x}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u \times v$

$$u(x) = 3x - 2 \text{ donc } u'(x) = 3$$

$$v(x) = e^{2x} \text{ donc } v'(x) = 2e^{2x}$$

$$f'(x) = u'v + uv'$$

$$f'(x) = 3e^{2x} + 2(3x - 2)e^{2x}$$

$$f'(x) = 3e^{2x} + (6x - 4)e^{2x} = e^{2x}(3 + 6x - 4) = (6x - 1)e^{2x}$$

Donc f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = (6x - 1)e^{2x}$