Tableau de dérivées

I) Dérivées des fonctions usuelles.

Fonction f :	***Dérivable sur***:	***Fonction dérivée f'*** :
$f(x) = k\ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n (n \in N)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	]- ∞ ; 0[∪]0 ; + ∞[	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	]0 ; + ∞[	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = cos(x)$
$f(x) = cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -sin(x)$
$f(x) = ln(x)$	]0 ;+∞[	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$

II) Dérivées et opérations

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel on a :

Fonction	***Dérivée***
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$\lambda u(x)$	$\lambda u'(x)$
$u(x)\, v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$u(x)^{\,n}$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\dfrac{1}{u(x)^{\,n}}$	$-\dfrac{n \times u(x)'}{u^{n+1}(x)}$
$sin(u(x))$	$u'(x)cos(u(x))$
$cos(u(x))$	$-u'(x)sin(u(x))$
$ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$

Exemples :

• **Exemple 1 :** Calculer la dérivée de la fonction f

$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+5x+2}{2x-3}}$ Pour $\boldsymbol{x \neq \frac{3}{2}}$ $\boldsymbol{f(x) = \frac{u}{v}}$

$\boldsymbol{u(x) = x^2 + 5x + 2}$ donc $\boldsymbol{u'(x) = 2x + 5}$

$\boldsymbol{v(x) = 2x - 3}$ donc $\boldsymbol{v'(x) = 2}$

Pour tout $x \neq \frac{3}{2}$:

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{(2x+5)(2x-3)-2(x^2+5x+2)}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2-6x+10x-15-2x^2-10x-4}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-19}{(2x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-6x-19}{(2x-3)^2}$$

Donc f' est la fonction définie sur $]-\infty\,; \frac{3}{2}[\, \cup \,]\frac{3}{2}\,; +\infty[$ par : $f'(x) = \frac{2x^2-6x-19}{(2x-3)^2}$

• **Exemple 2 :** Calculer la dérivée de la fonction g:

$g(x) = (2x + 5)(6x - 2)$ Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$\boldsymbol{g(x) = u\,v}$ avec :

$\boldsymbol{u(x) = 2x + 5}$ donc $\boldsymbol{u'(x) = 2}$

$\boldsymbol{v(x) = 6x - 2}$ donc $\boldsymbol{v'(x) = 6}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = u'v + uv' = 2(6x - 2) + 6(2x + 5) = 12x - 4 + 12x + 30 = 24x + 26$$

Donc g' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g'(x) = 24x + 26$

• **Exemple 3 :** Calculer la dérivée de la fonction i :

$$i(x) = \frac{1}{x^2-2x+4}$$

$x^2 - 2x + 4 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 < 0$ donc pour tout x de $\mathbb{R}$: $x^2 - 2x + 4 \neq 0$

Pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{i(x) = \frac{1}{u}}$

$\boldsymbol{u(x) = x^2 - 2x + 4}$ donc $\boldsymbol{u'(x) = 2x - 2}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$i'(x) = \frac{-u'}{u^2} = \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+4)^2} = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$$

$i'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$

Donc i' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $i'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2}$

Exemple 4 : : Calculer la dérivée de la fonction f:

$f(x) = \ln(3x+6)$ $3x+6 > 0$ pour $x > -2$

f est définie et dérivable sur]-2 ;+∞ [

Pour ∈]-2 ;+∞ [$f(x) = \ln(u(x))$

$u(x) = 3x + 6$ donc $u'(x) = 3$

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$f'(x) = \frac{3}{3x+6}$

Donc f est dérivable sur]-2 ;+∞ [et $f'(x) = \frac{3}{3x+6}$

Exemple 5 : Calculer la dérivée de la fonction f:

$f(x) = e^{5x}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^u$

$u(x) = 5x$ donc $u'(x) = 5$

$f'(x) = u'e^u$ donc $f'(x) = 5e^{5x}$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5\,e^{5x}$

Exemple 6 : Calculer la dérivée de la fonction f:

$f(x) = (3x-2)e^{2x}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u \times v$

$\boldsymbol{u(x) = 3x - 2}$ **donc** $\boldsymbol{u'(x) = 3}$

$\boldsymbol{v(x) = e^{2x}}$ **donc** $\boldsymbol{v'(x) = 2e^{2x}}$

$f'(x) = u'v + uv'$

$f'(x) = 3e^{2x} + 2(3x-2)e^{2x}$

$f'(x) = 3\boldsymbol{e^{2x}} + (6x-4)e^{2x} = e^{2x}(3 + 6x - 4) = (6x-1)\,e^{2x}$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (6x-1)\,e^{2x}$