Tableau des primitives

I) Primitives des fonctions usuelles :

Soit C un réel quelconque.

Fonction f	Sur l'intervalle :	Primitives F
k	$\mathbb{R}$	$kx + C$
x	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x^2 + C$
x^n $(n \geq 1)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x^2}$	] - ∞ ; 0 [ou] 0 ; +∞[	$-\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \geq 2)$	] - ∞ ;0 [ou] 0 ; +∞[	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	] 0 ; +∞[	$2\sqrt{x} + C$
$\frac{1}{x}$	] 0 ; +∞[	$ln\,(x) + C$
$sin\,(x)$	$\mathbb{R}$	$-\,cos\,(x) + C$
$cos\,(x)$	$\mathbb{R}$	$sin\,(x) + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$

II) Primitives et composées de fonctions

Soit u et v des fonctions définies et dérivables respectivement sur les intervalles I et J.
Notons U et V leurs primitives respectives.

Fonction f	Condition sur u	Primitives de f sur I
$u+v$	$I \cap J$	U+V
ku	I	kU
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	I	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$
$\frac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0$	$-\frac{1}{u}+C$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$)	$u(x) \neq 0$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+C$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$	$2\sqrt{u}+C$
$\frac{u'}{u}$	$u(x) > 0$	$ln(u)+C$
$u'e^u$	I	e^u+C

Exemples :

Pour chaque fonction f, déterminer ses primitives et en déduire une primitive sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$; $I = \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]1\,;\,+\infty[$.

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; I =]2 ; +∞[;

d) $f(x) = \frac{-1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$; I =]0 ; +∞[.

Réponses :

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$ en utilisant la formule $\boldsymbol{u'u^n}$ avec $u(x) = x^3 - 1$ et $u'(x) = 3x^2$ on obtient :

$f(x) = \frac{3x^2(x^3-1)^5}{3} + C$

$F(x) = \frac{1}{3\times 6}(x^3 - 1)^6 + C$ $\quad$ $\boldsymbol{F(x) = = \frac{1}{18}(x^3 - 1)^6 + C}$

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ en utilisant la formule $\frac{\boldsymbol{u'}}{\sqrt{\boldsymbol{u}}}$ avec $u(x) = x^2 - 1$ $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ on obtient :

$F(x) = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{x^2 - 1} + C$ $\quad$ $\boldsymbol{F(x) = 3\sqrt{x^2 - 1} + C}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ en utilisant la formule $\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$ avec $u(x) = x^2 - 4$ et $u'(x) = 2x$

$f(x) = \frac{1}{2}\, \frac{2x}{x^2-4}$ on obtient :

$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2} \ln (x^2 - 4) + C}$

d) $f(x) = -\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$ en utilisant la formule $\boldsymbol{u'e^u}$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $u(x) = -\frac{1}{x^2}$ on obtient :

$\boldsymbol{F(x) = e^{\frac{1}{x}} + C}$