Probabilités conditionnelles et indépendance

I) Probabilités conditionnelles

1) Définition

Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé. On le note $P_A(B)$ et on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Rappel : $A \cap B$ (l'intersection) est l'ensemble des issues appartenant à la fois à A et à B.

Remarques :

- $P_A(B)$ est une probabilité conditionnelle : la condition est exprimée par « sachant que A est réalisé. »
- On écrit aussi : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
- Si P(B)$\neq$ 0 on a aussi $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.
- Aussi en général, $P_B(A) \neq P(B)$

Exemple 1 : Dans une classe de Première 55% des élèves sont des filles et 40% des élèves sont des filles demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille.

Soit F l'évènement : « être une fille » et D l'évènement : « être demi-pensionnaire »

$$P_F(D) = \frac{p(F \cap D)}{p(F)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{40}{55} = \frac{8}{11}$$

Exemple 2 : Un professeur de mathématiques trie sa bibliothèque dans laquelle figure 32 manuels de différents niveaux, certains conformes aux programmes actuels et d'autres, plus vieux ne sont pas conformes. La répartition des manuels est donnée dans le tableau suivant :

	Conforme	**Non conforme**	**Total**
Seconde	**6** (S $\cap C$)	**7** (S $\cap \bar{C}$)	**13**
Première	**3** (P $\cap C$)	**5** (P $\cap \bar{C}$)	**8**
Terminale	**5** (T $\cap C$)	**6** (T $\cap \bar{C}$)	**11**
Total	**14**	**18**	**32**

Il prend un manuel au hasard, et on considère les évènements suivants :

C : « Le manuel est conforme aux programmes actuels. »

S : « Le manuel est un manuel de seconde. »

T : « Le manuel est un livre de Terminale. »

Nombre de livres conformes

$P(C) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$

Nombre total de livres

Nombre de livres de seconde

$P(S) = \frac{13}{32}$

Nombre total de livres

Nombre de livres de terminale

$P(T) = \frac{11}{32}$

Nombre total de livres

Nombre de livres de **terminale conformes** ($T \cap C$)

$P_C(T) = \frac{5}{14}$

Nombre total de livres **conformes**

Nombre de livres de première et terminale et conformes ($\bar{S} \cap C$)

$P_C(\bar{S}) = \frac{3+5}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

Nombre total de livres **conformes**

Nombre de livres **conformes en premières et terminales** ($\bar{S} \cap C$)

$P_{\bar{S}}(C) = \frac{3+5}{8+11} = \frac{8}{19}$

Nombre total de livres **de** première et terminale ($\bar{S}$)

Exemple 3 :

1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi".
Donc $A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de pique".

Alors : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. Dans un jeu de 32 cartes nous avons 8 piques.
et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$. Dans un jeu de 32 cartes il y a un seul roi de pique.
Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :
$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$.

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un pique, on a une chance sur 8 d'obtenir le roi.

2) Propriétés :

Pour tout évènement :
$\mathbf{0 \leq P_A(B) \leq 1}$ **et**
$\mathbf{P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1}$

Démonstration :

● On sait que $A \cap B \subset A$, on a donc $0 \leq \mathrm{p}\ (A \cap B) \leq \mathrm{p}\ (A)$

Puisque p (A) >0 , en divisant l'inégalité par p(A), on en déduit : $0 \leq \frac{p\ (A\cap B)}{\mathrm{p}\ (A)} \leq \frac{\mathrm{p}\ (A)}{\mathrm{p}\ (A)}$

Donc $\mathbf{0 \leq P_A(B) \leq 1}$

● pour tous A et B : $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

Donc p $(A \cap B)$ + p $(A \cap \bar{B})$ = p $((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}))$ = p (A)

Comme p (A) $\neq$ 0 en divisant par p(A) on a :

$$\frac{\mathrm{p}\ (A\cap B) + \mathrm{p}\ (A\cap \bar{B})}{\mathrm{p}\ (A)} = \frac{\mathrm{p}\ (A)}{\mathrm{p}\ (A)}$$

$\frac{\mathrm{p}\ (A\cap B)}{\mathrm{p}\ (A)} + \frac{\mathrm{p}\ (A\cap \bar{B})}{\mathrm{p}\ (A)} = 1$ donc $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$

II) Arbre de probabilité

1) Partition de l'univers

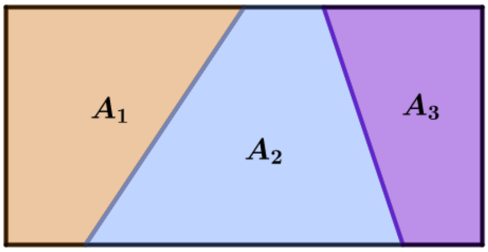
Soit A_1 ; A_2 et A_3 trois évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω .

On dit que A_1 ; A_2 et A_3 forment une partition de l'univers Ω lorsque :

- Les évènements sont 2 à 2 incompatibles (ou disjoints) :
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$; $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ **et** $A_2 \cap A_3 = \emptyset$

- Leur réunion est l'univers Ω

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$



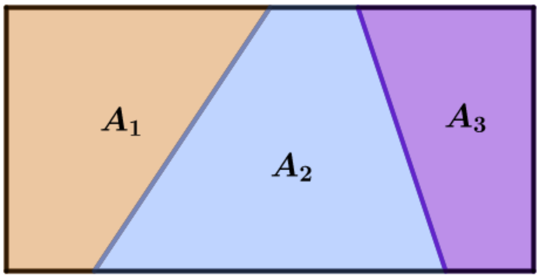
Ω

Remarques :

- Cette définition se généralise à un nombre n quelconque (supérieur ou égal à 2) d'évènements.
- A_1 ou A_2 forment une partition de Ω **lorsque** $\overline{A_2}$ **=** A_1

Propriété :

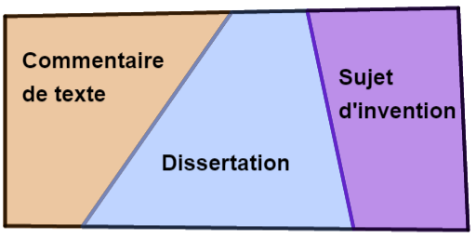
> **Si A_1 ; A_2 et A_3 forment une partition de l'univers Ω alors :**
> **$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 1$**



Ω

Exemple : On choisit au hasard un candidat au baccalauréat dans un lycée. La seconde partie de l'épreuve écrite de français consiste à traiter au choix un commentaire de texte (noté C), une dissertation (notée (D) et un sujet d'invention (noté I).

2ème partie de l'épreuve de Français :



Ω = 2ème partie de l'épreuve de Français

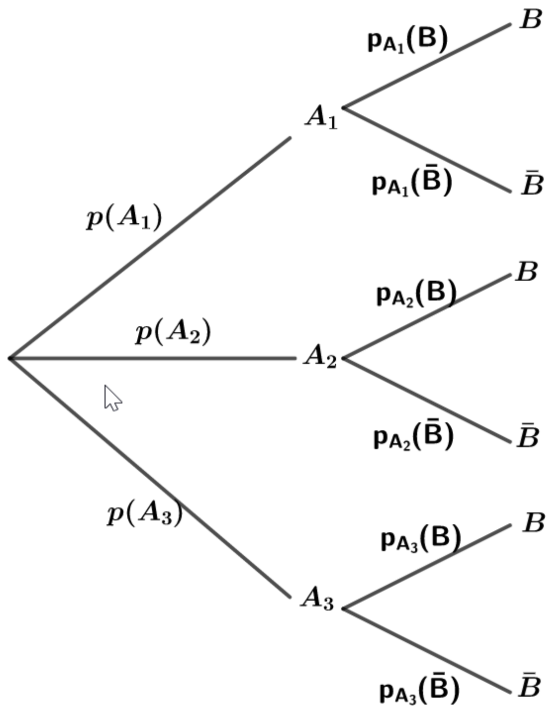
La deuxième partie Ω de l'épreuve propose trois exercices aux choix : le commentaire, la dissertation ou le sujet d'invention on a donc :
$\boldsymbol{C \cup D \cup I = \Omega}$

De plus, un candidat ne peut choisir qu'un seul de ces trois exercices. Donc les événements C, D et I sont deux à deux incompatibles :
$\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D} = \emptyset \qquad \boldsymbol{I} \cap \boldsymbol{D} = \emptyset \qquad \boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{I} = \emptyset$

Les évènements C, D et I forment donc une partition de l'univers.

2) Règles de principe d'un arbre de probabilités

On peut représenter une expérience aléatoire par un arbre de probabilités à branches pondérées



• Sur les trois premières branchent se trouvent les probabilités des évènements A_1 , A_2 et A_3.

• Puis sur les autres branches se trouvent les probabilités conditionnelles de B ou $\bar{B}$ sachant A_1 , A_2 ou A_3.

• La somme des probabilités inscrites sur les branches d'un même nœud est égal à 1.

• La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur les branches du chemin.

$\boldsymbol{p(A_1 \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B)}$
$\boldsymbol{p(A_2 \cap B) = p(A_2) \times p_{A_2}(B)}$
$\boldsymbol{p(A_3 \cap B) = p(A_3) \times p_{A_3}(B)}$

Remarques :

- si on permute les rôles de A et B on obtient un autre arbre. Il faut lire attentivement l'énoncé pour choisir l'arbre adapté à l'exercice. Si vous n'arrivez pas à avancer dans cotre exercice il est fort probable qu'il faille faire l'arbre dans l'autre sens.

- Un arbre pondéré correctement construit est une preuve même lors d'examen.

- Il faut construire l'arbre de manière claire, soignée afin de s'en servir tout au long de l'exercice.

- Soyez attentifs à la lecture de l'énoncé. Il faut distinguer 3 types de probabilités :

• Une probabilité « classique » tel que $p(A)$ (correspond au 1er niveau de l'arbre)

• Un probabilité « conditionnelle » tel que $p_A(B)$ **(correspond au 2ème niveau de l'arbre)**

• Un probabilité « d'intersection » du type $p(A \cap B)$ (n'apparait pas sur l'arbre)

Exemple : Une petite chocolaterie détient trois usines de production (nommées usine 1, usine 2 et usine 3).

L'entreprise produit 1 500 ballotins de chocolats par jour dont :

- 450 sont produits par l'usine 1 ;
- 300 sont produits par l'usine 2 ;
- 750 sont produits par l'usine 3.

Les ballotins sont composés uniquement de chocolats noirs ou uniquement de chocolats au lait.

65 % des ballotins produits par l'usine 1 sont uniquement composés de chocolats au lait.,

20 % des ballotins produits par l'usine 2 sont uniquement composés de chocolats au lait.et
60 % des ballotins produits par l'usine 3 sont uniquement composés de chocolats au lait.

On choisit au hasard un ballotin produit par la chocolaterie. On note les événements suivants :

- U_1 : « le chocolat provient de l'usine 1 » ;
- U_2 : « le chocolat provient de l'usine 2 » ;
- U_3 : « le chocolat provient de l'usine 3 » ;
- L : « le ballotin est composé de chocolats au lait ».

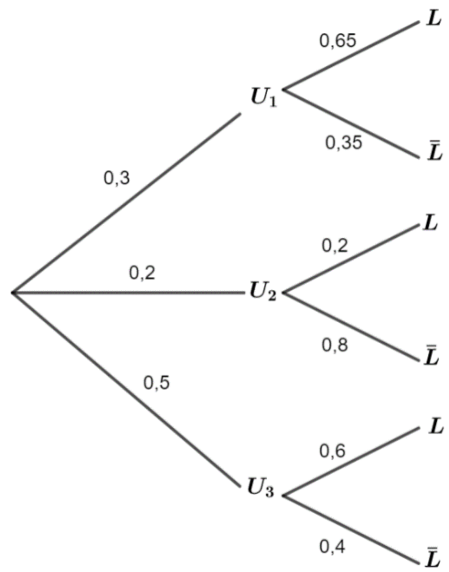
Ces données permettent de construire l'arbre de probabilités ci-dessous et de compléter les branches avec les probabilités suivantes :

450 + 300 +750 =1500

$p(U_1) = \frac{450}{1500} = 0{,}3$ $\quad P_{U_1}(\mathrm{L}) = \frac{65}{100} = 0{,}65$ $\quad P_{U_1}(\bar{L}) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$

$p(U_2) = \frac{300}{1500} = 0{,}2$ $\quad P_{U_2}(\mathrm{L}) = \frac{20}{100} = 0{,}2$ $\quad P_{U_2}(\bar{L}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$p(U_3) = \frac{750}{1500} = 0{,}5$ $\quad P_{U_3}(\mathrm{L}) = \frac{60}{100} = 0{,}6$ $\quad P_{U_3}(\bar{L}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$



$\mathrm{P}(U_1 \cap L) = 0{,}65 \times 0{,}3 = 0{,}195$

$\mathrm{P}(U_2 \cap L) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$

$\mathrm{P}(U_3 \cap L) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$

et

$\mathrm{P}(U_1 \cap \bar{L}) = 0{,}35 \times 0{,}3 = 0{,}105$

$\mathrm{P}(U_2 \cap \bar{L}) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$

$\mathrm{P}(U_3 \cap \bar{L}) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$

3) Formule de probabilité totale

La probabilité de B s'obtient en ajoutant les probabilités des branches qui aboutissent à B :

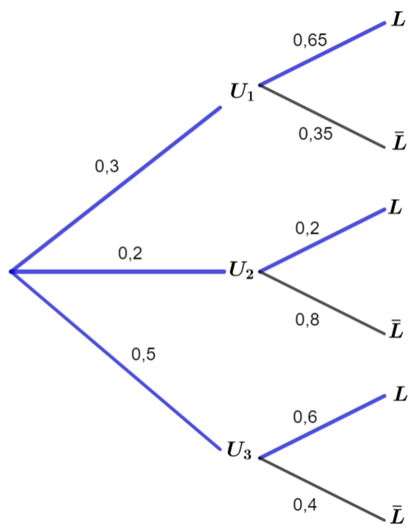
$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$

Plus généralement, si $A_1 ; A_2 \dots A_n$ forment une partition de l'univers c'est-à-dire $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ et les A_i sont deux à deux disjoints alors :

$p(B) = p(A_1 \cap \mathrm{B}) + p(A_2 \cap \mathrm{B}) + \dots + p(A_n \cap \mathrm{B})$

$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

Exemple : En reprenant l'exemple et les résultats précédents déterminons la probabilité d'avoir du chocolat au lait p(L) :



Les branches qui correspondent à l'évènement L sont en bleues :

$P(L) = P_{U_1}(L) \times P(U_1) + P_{U_2}(L) \times P(U_2) + P_{U_3}(L) \times P(U_3)$

$P(L) = \mathrm{P}(U_1 \cap L) + \mathrm{P}(U_2 \cap L) + \mathrm{P}(U_3 \cap L)$

$P(L) = 0{,}65 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}6$

$P(L) = 0{,}195 + 0{,}04 + 0{,}3$

$\boldsymbol{P(L) = 0{,}535}$

III) Variables aléatoires

1) Exemples

Exemple 1 :

Considérons un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On lance ce dé. L'ensemble des issues est Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{6}$

On convient que si la face 1 apparaît on gagne 5 € sinon on perd 2 €.

On peut donc définir une fonction X qui a chaque issue de Ω associe le « gain » obtenu, cette fonction prend donc les valeurs 5 et – 2 (une perte étant un « gain » négatif.)

La probabilité que X prenne la valeur 5 est $\frac{1}{6}$ et celle qu'elle prenne la valeur – 2 est $\frac{5}{6}$

On écrit p (X = 5) = p ({1}) = $\frac{1}{6}$ et p(X = – 2) = p ({2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }) = $\frac{5}{6}$

On résume ces résultats dans un tableau :

Gains x_i	5	-2
Probabilités p_i = P (X = x_i)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

La somme des probabilités fait 1.

Exemple 2 : Considérons une pièce de monnaie bien équilibrée.

On lance deux fois de suite cette pièce.

En notant P « on a obtenu pile » et F « on a obtenu face », l'ensemble des issues est Ω = {PP ; PF ; FP ; FF}

Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{4}$.

On convient que chaque fois que l'on obtient « pile » on gagne 3 € et que chaque fois que l'on obtient « face » on perd 1 €.

On peut donc définir une fonction X qui a chaque issue de Ω associe le « gain » obtenu, cette fonction prend donc les valeurs 6 (pour PP), 2 pour PF ou FP et − 2 pour FF.

La probabilité que X prenne la valeur 6 est $\frac{1}{4}$ on note p (X = 6) = $\frac{1}{4}$

La probabilité que X prenne la valeur 2 est $\frac{1}{2}$ on note p (X = 2) = $\frac{1}{2}$

La probabilité que X prenne la valeur − 2 est $\frac{1}{4}$ on note p (X = − 2) = $\frac{1}{4}$

En général, on résume ces résultats dans un tableau :

Gains x_i	6	2	-2
Probabilités p_i = P (X = x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La somme des probabilités fait 1

2) Définition

On considère un ensemble fini Ω et une loi de probabilité *p* sur Ω.

Une variable aléatoire X sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r$ désignent les valeurs prises par X, on note « X = x_i » l'événement « X prend la valeur x_i »

On définit une nouvelle loi de probabilité associée à X, par la donnée des réels x_i et des probabilités p_i = P (X = x_i) pour $1 \leq i \leq r$

Exemple : Un sac contient 15 jetons bleus, 10 jetons rouges, 3 jetons verts et 2 jetons noirs, tous indiscernables au toucher.

Un joueur extrait au hasard un jeton de ce sac et note sa couleur : B pour bleu, R pour rouge, V pour vert et N pour noir.

Il marque 3 points si le jeton est rouge, 5 points si le jeton est vert, mais perd 1 point si le jeton est bleu et perd 3 points si le jeton est noir.

Soit G la variable aléatoire qui donne le nombre de points (positif ou négatif) obtenu par le joueur.

Déterminer la loi de probabilité de la variable G.

Solution :

Le jeton tiré est :	Bleu	Rouge	Vert	Noir
Probabilités :	$\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$	$\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$
Nombre de points marqués :	-1	3	5	-3

On a donc la loi de probabilité de la variable aléatoire G, en notant n_i les valeurs prises par G :

x_i	– 3	– 1	3	5
p_i = P (X = x_i)	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$

3) Espérance, variance , écart type

a) Définitions

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité (x_i , p_i) $1 \leq i \leq r$
On appelle :

• Espérance de X le nombre noté E(X) défini par

E(X) = $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_r x_r$ noté aussi E(X) = $\sum_{i=1}^{i=r} p_i \; x_i$

• Variance de X le nombre noté V(X) défini par

V(X) = $p_1(x_1 - \mathrm{E(X)})^2 + p_2(x_2 - \mathrm{E(X)})^2 + \ldots + p_r(x_r - \mathrm{E(X)})^2$ noté aussi

V(X) = $\sum_{i=1}^{i=r} p_i \; (x_i - \mathrm{E(X)})^2$

• Ecart type de X le nombre noté σ(X) défini par

σ(X) = $\sqrt{\mathrm{V(X)}}$

Exemples :

En reprenant les deux exemples vus dans le paragraphe 1) Exemples du IV Variables aléatoires : on applique les formules :

Exemple 1 :

Gains x_i	5	-2
Probabilités p_i = P (X = x_i)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

E(X) = 5 x $\frac{1}{6}$ + (-2) x $\frac{5}{6}$ = $-\frac{5}{6}$

V(X) =$\frac{1}{6}$ (5 – $(-\frac{5}{6})^2$ + $\frac{5}{6}$ $(-2 - (-\frac{5}{6})^2$ = $\frac{245}{36} \approx 6{,}81$

σ(X) = $\sqrt{\frac{245}{36}} \approx 2{,}61$

Exemple 2 :

E(X) = 6 x $\frac{1}{4}$ + 2 x $\frac{1}{2}$ – 2 x $\frac{1}{4}$ = 2

V(X) =$\frac{1}{4}$ (6 – 2)² + $\frac{1}{2}$ (2 – 2)² + $\frac{1}{4}$ (−2 −2)² = 4 + 4 = 8

σ(X) = $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Gains x_i	6	2	-2
Probabilités p_i = P (X = x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b) Remarques

• L'espérance d'une variable aléatoire est la moyenne des valeurs qu'elle prend en considérant que les probabilités sont les fréquences des valeurs.

• La variance et l'écart type d'une variable aléatoire ont les mêmes définitions que la variance et l'écart type d'une série statistique.

c) Propriétés

Compte tenu de la dernière remarque on a :

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité (x_i , p_i) $1 \leq i \leq r$
Soit a et b deux réels

$E(aX + b) = a\,E(X) + b$ **;** $V(aX + b) = a^2\,V(x)$ **et** $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$

et

$V(x) = \sum_{i=1}^{i=r} p_i\,x_i{}^2 - (E(X))^2$

Remarque :
Lorsqu'une variable aléatoire est définie comme un gain algébrique lors d'un jeu, l'espérance représente le gain moyen après un très grand nombre de parties.
Ainsi une espérance nulle indique un jeu équitable, une espérance négative indique un jeu défavorable au joueur et une espérance positive indique un jeu favorable au joueur.