Successions d'épreuves indépendantes. Loi binomiale

I) Evènements indépendants

1) Définition

Si A et B sont deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$
A et B sont indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "On tire un roi".
Soit B l'événement "On tire un pique".
Alors $A \cap B$ est l'événement "On tire le roi de pique".

On a :
$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 4 rois
$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 8 piques et
$P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 1 roi de pique
Donc $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$

Les événements A et B sont donc indépendants.
Ainsi, par exemple, $P_B(A) = P(A)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les piques et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

Contre-exemple :

On tire 1 jeton d'un sac contenant 6 jetons numérotés de 1 à 6.
Soit A : « le jeton est pair ».
Soit B : « le jeton vaut au moins 4 ».
On a : A = {2,4,6} et B ={4 ; 5 ; 6} et A∩B ={4 ; 6}
On obtient: $p(A) = \frac{3}{6}$ et $p(B) = \frac{3}{6}$

Donc : $p(A) \times p(B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
Or $p(A \cap B) = \frac{2}{6}$

Donc $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ Donc A et B ne sont pas indépendants.

2) Propriété

Si A et B sont deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$
A et B sont indépendants si et seulement si : $P_A(B) = P(B)$

Démonstration :

$P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Donc $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{\mathrm{P(A)\times P(B)}}{P(A)} = P(B)$

Réciproquement :

$P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ Si $P_A(B) = P(B)$ alors $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B)$ d'où $P(A \cap B) = \mathrm{P(A) \times P(B)}$

Remarque importante : Il ne faut pas confondre évènements incompatibles et évènements indépendants. En effet, deux évènements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent se réaliser en même temps c'est-à-dire lorsque A ∩ B = ∅

Exemple : En reprenant l'exemple précédent :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "On tire un roi". Soit B l'événement "On tire un pique". On a :
$P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 4 rois
$P(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ dans un jeu de 32 cartes,il y a 8 piques et
$P_B(A)$ se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les piques donc $P_B(A) = \frac{1}{8}$
$P(A)$ se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les toutes les cartes donc
$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
Donc $P_B(A) = P(A)$ On retrouve l'indépendance des deux évènements déjà montrée au 1)

3) Successions de deux épreuves indépendantes

a) Définition

Plusieurs épreuves sont identiques et indépendantes si

- **Elles ont les mêmes issues**
- **Chaque issue possède la même probabilité**

b) Propriété

On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.

Si on répète l'expérience deux fois de suite :

- La probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à $P(A) \times P(B)$

- La probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à $P(B) \times P(A)$.

- La probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$.

- La probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

Exemples de Succession de deux épreuves indépendantes :

● On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).

● Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

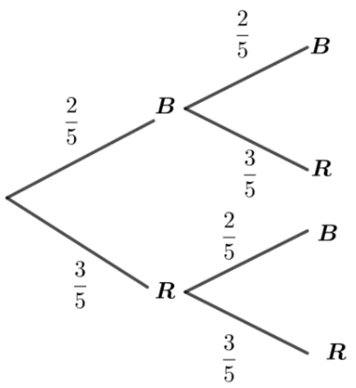
c) Exemple et méthode pour représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes dans un arbre :

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience Deux fois de suite.
1. Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2. Déterminer la probabilité :
  a. D'obtenir deux boules blanches
  b. D'obtenir une boule blanche et une rouge
  c. Au moins une boule blanche

Réponse :

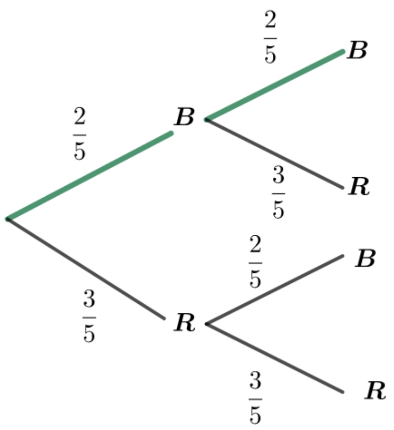
Tout d'abord nous allons faire un arbre en mettant les probabilités sur chaque branche.
On notera :
B l'évènement : « Obtenir une boule blanche » et
R l'évènement : « Obtenir une boule rouge »
Nous avons 5 boules, la probabilité d'avoir une blanche est $p(B) = \frac{2}{5}$ et la probabilité d'avoir une rouge est $p(R) = \frac{3}{5}$

1. L'arbre représentant l'expérience



2. La probabilité d'avoir deux boules blanches correspond à l'issue (B-B) , nous avons tracé en vert les branches correspondant à cette issue :

a.

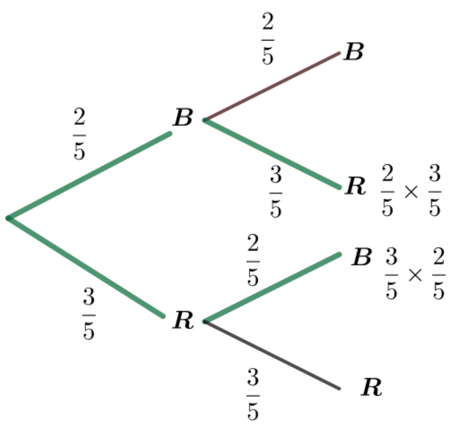


On multiplie les probabilités des deux branches vertes correspondant à l'issue (B-B) :

$P(B\text{-}B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16$

Donc la probabilité d'avoir deux boules blanches est $\frac{4}{25}$ ou 0,16

b. La probabilité d'avoir une boule blanche et une rouge correspond aux issues (B-R) et (R-B) nous avons tracé en vert les branches correspondant à ces issues :

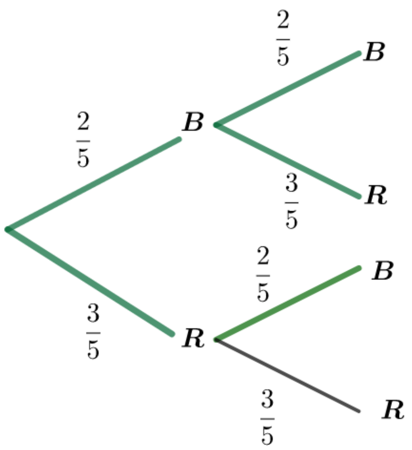


On additionne les probabilités des deux issues (B-R) et (R-B) nous avons tracé en vert les branches correspondant à ces issues :

$P(B\text{-}R \text{ ou } R\text{-}B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25} = 0{,}48$

Donc la probabilité d'avoir une boule blanche et une rouge est $\frac{12}{25}$ ou 0,48

C. La probabilité d'avoir au moins une boule blanche correspond aux issues (B-B) ; (B-R) et (R-B) nous avons tracé en vert les branches correspondant à ces issues :



On additionne les probabilités des trois issues (B-B) ; (B-R) et (R-B):

p(B) $= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4+6+6}{25} = \frac{16}{25}$

p(B) $=$ $0{,}64$

Donc la probabilité d'avoir au moins une boule blanche est $\frac{16}{25}$ ou 0,64 ;

Autre méthode :

L'évènement contraire $\overline{BB}$ est de n'avoir aucune boule blanche qui a pour probabilité :

P(B) $= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ donc la probabilité d'avoir au moins une boule blanche est $p = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ $= 0{,}64$

Remarques :
Pour une expérience dont le nombre d'issues est supérieur à 2, le principe reste le même.
Pour une expérience dont le nombre de répétition est supérieur à 2, le principe reste le même.

Exemple :

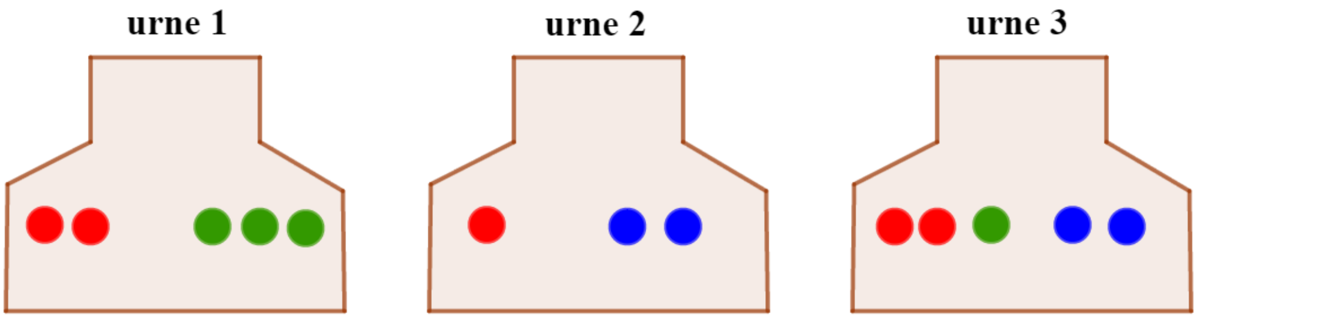
On lance un dé à six faces 4 fois de suite.
On considère les issues suivantes :
A : On obtient un nombre pair.
B : On obtient un 1.
C : On obtient un 3 ou un 5.

La probabilité d'obtenir la suite d'issues (A ; B ; A ; C) est égale à :
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{144} = \frac{1}{72}$

4) Cas général : Successions de n épreuves indépendantes

Plus généralement, dans une expérience à n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1\ ;\ x_2\ ; \dots x_n)$ est égale au produit des probabilités des issues de ses composantes $(x_1\ ;\ x_2\ ; \dots x_n)$

Exemple :
Voici trois urnes :



On tire au hasard une boule de l'urne 1 et on note sa couleur, puis, on tire une boule de l'urne 2 et on note sa couleur et, enfin, on tire une boule de l'urne 3 et on note sa couleur. On note sa couleur R pour rouge, B pour bleu et V pour vert.

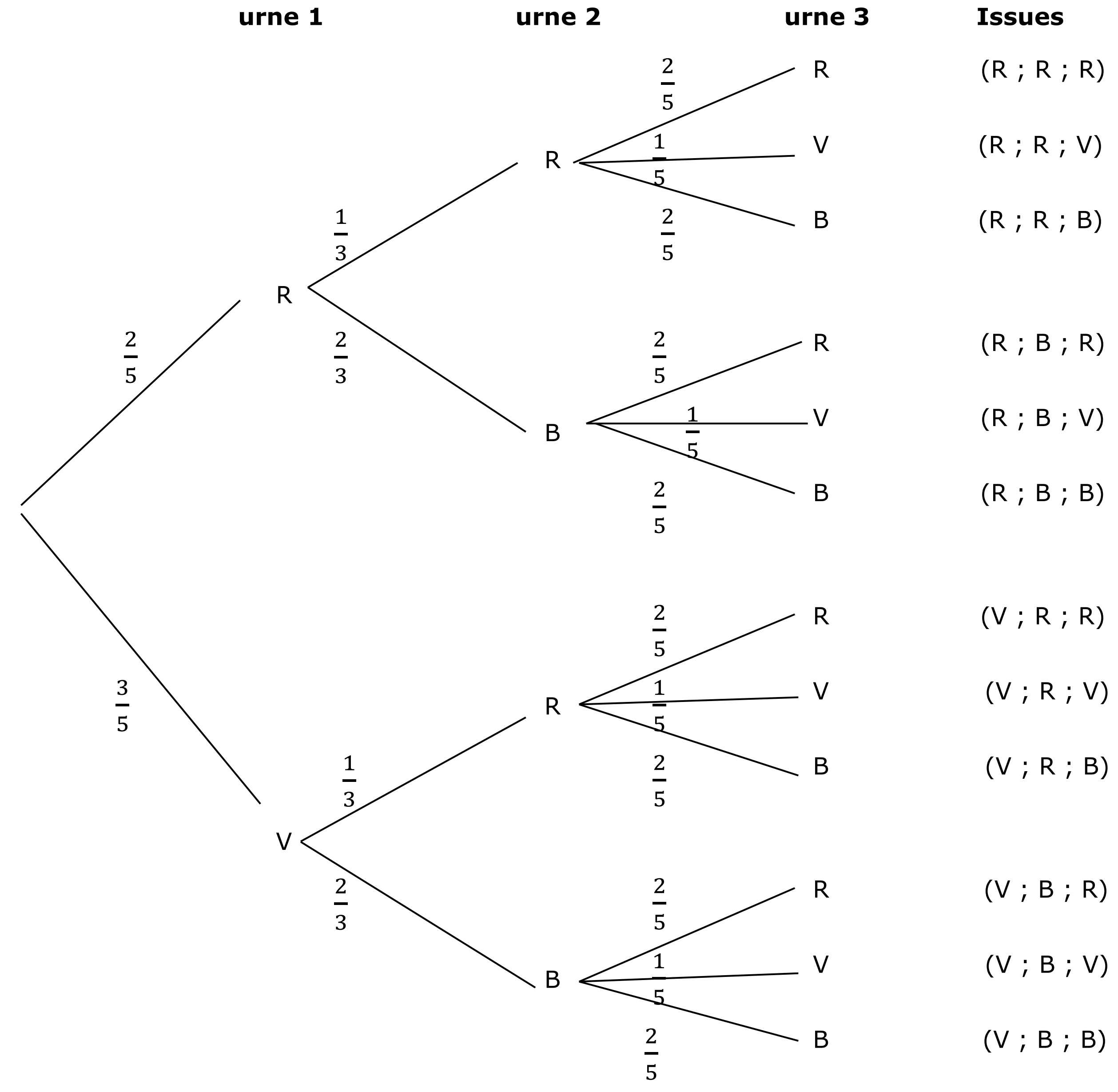
a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire.

c. On gagne à ce jeu lorsqu'on tire au moins deux boules rouges. Calcule la probabilité de gagner une partie.

Réponse :

a. Cette expérience aléatoire correspond à 3 épreuves indépendantes.



b. La loi de probabilité sur l'ensemble E des issues est donnée par le tableau :

Issue	RRR	RRV	RRB	RBR	RBV	RBB	VRR	VRV	VRB	VBR	VBV	VBB
Probabilité	$\frac{4}{75}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{6}{75}$	$\frac{3}{75}$	$\frac{6}{75}$	$\frac{12}{75}$	$\frac{6}{75}$	$\frac{12}{75}$

$p(RRR) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{75}$ $p(RRV) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{75}$ $p\ (RRB) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{75}$

$p\ (RBR) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{75}$ $p\ (RBV) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{75}$ $p\ (RBB) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{75}$

$p\ (VRR) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{75}$ $p\ (VRV) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{75}$ $p\ (VRB) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{75}$

$p\ (VBR) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{75}$ $p\ (VBV) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{75}$ $p\ (VBB) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{75}$

c. Avoir au moins deux boules rouges revient à avoir 3 boules rouges ou 2 boules rouges

La probabilité de gagner est donc :

P=p(RRR)+p(RRV)+p(RRB)+p(RBR)+p(VRR)= $\frac{4}{75} + \frac{2}{75} + \frac{4}{75} + \frac{8}{75} + \frac{6}{75} = \frac{24}{75}$

La probabilité de gagner est $\frac{24}{75}$.

II) Epreuve et loi de Bernoulli

1) Définition

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p , toute expérience aléatoire admettant deux issues exactement :

- **L'une appelée succès notée S dont la probabilité de réalisation est p**
- **L'autre appelée échec notée E ou $\bar{S}$ dont la probabilité de réalisation est $1 - p$**

Exemples

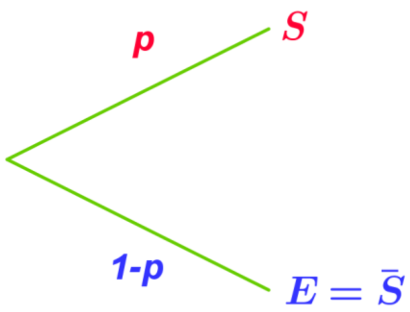
Exemples

1) Un lancer de pièce de monnaie bien équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$ (le succès S étant indifféremment « obtenir PILE » ou « obtenir FACE »).

2) Un lancer de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, dans lequel on s'intéresse à l'apparition de S : « obtenir un 1 » est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ et la probabilité de $\bar{S}$ est donc $1 - p = \frac{5}{6}$

3) Extraire une carte d'un jeu de 32 cartes et s'intéresser à l'obtention d'un as est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{8}$ et la probabilité de $\bar{S}$ est donc $1 - \mathrm{p} = \frac{7}{8}$

Illustration :



Note historique : Jacques **Bernoulli** est un mathématicien suisse (1654 – 1705)

2) Propriété : loi de Bernoulli

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p , si on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on dit que X est une variable de Bernoulli de paramètre p, elle suit la loi de Bernoulli de paramètre p :

k	1	0
P(X = k)	p	$1 - p$

Son espérance est E(X) = p , sa variance est V(x) = $p(1-p)$ et

son écart type est σ (X) = $\sqrt{p(1-p)}$.

3) Schéma de Bernoulli

a) Définition 1 : Schéma de Bernoulli

On appelle schéma de Bernoulli comportant n épreuves (n entier naturel non nul) de paramètre p , toute expérience consistant à répéter n fois de façon indépendantes une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Exemples

Exemples :

1) 5 lancers successifs d'une pièce bien équilibrée, en appelant succès l'obtention de

PILE constitue un schéma de Bernoulli avec $n = 5$ et de paramètre $p = \frac{1}{2}$

2) 10 lancers de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, en appelant succès l'apparition de S : « obtenir un 1» constitue un schéma de Bernoulli avec $n = 10$ et de paramètre $p = \frac{1}{6}$

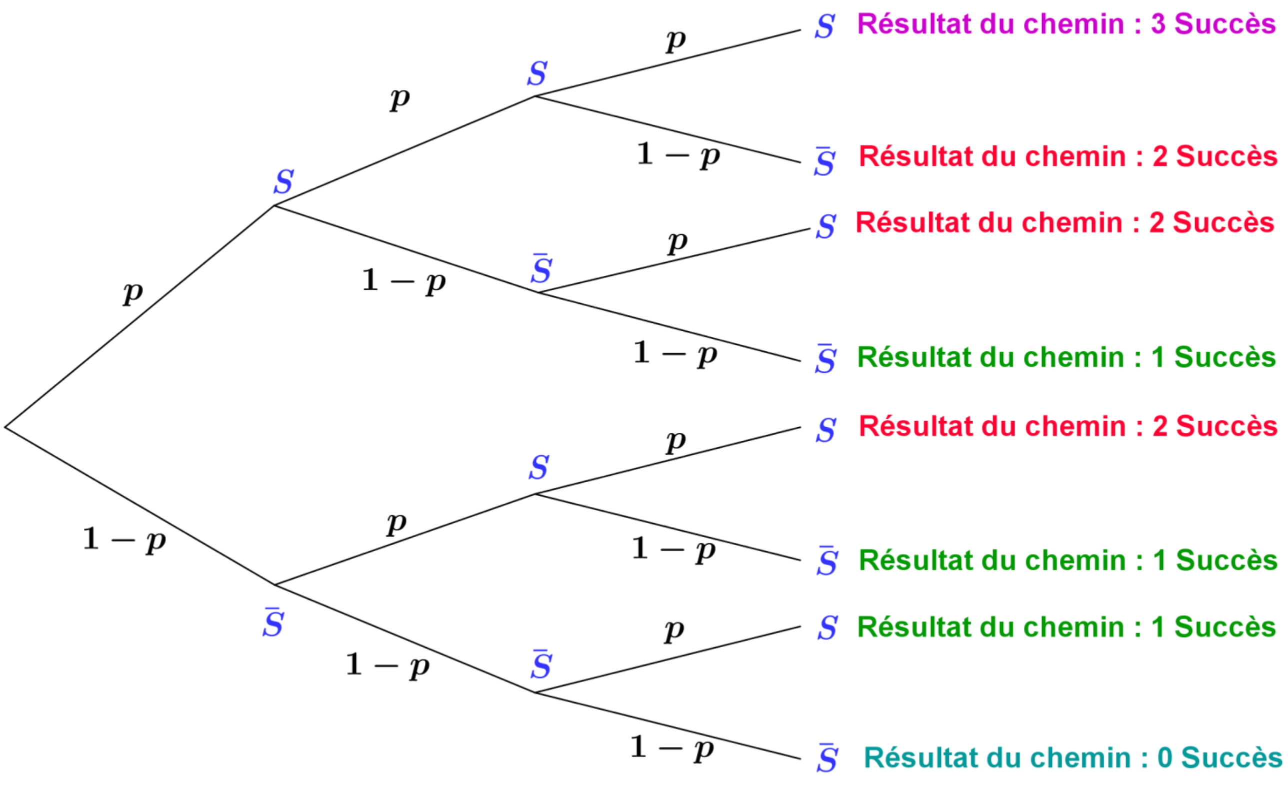
Remarques :

• Un schéma de Bernoulli peut être illustré par un arbre (ci-dessous cas de n = 3)

• Un résultat est une liste de n issues S ou $\bar{S}$ (par exemple $\{S, \bar{S}, \bar{S}, S, \bar{S}\}$ dans un schéma à 5 épreuves).

• Le chemin codé $S\ \bar{S}\ \bar{S}\ S\ \bar{S}$ est un chemin qui réalise 2 succès lors de 5 répétitions.

Illustration :



b) Définition 2

On considère un schéma de Bernoulli de n épreuves (entier naturel non nul), représenté par un arbre.
Pour tout k entier naturel $0 \leq k \leq n$, On note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors des n répétitions.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \ldots \times n$

Par convention $\binom{0}{0}$ = 1

Exemples

Exemple :

Dans l'arbre représenté ci-dessus on a : n = 3 et

Pour k = 0, il y a 1 seul chemin réalisant 0 succès donc $\binom{3}{0}$ = 1

Pour k = 1, il y a 3 chemins réalisant 1 succès donc $\binom{3}{1}$ = 3

Pour k = 2, il y a 3 chemins réalisant 2 succès donc $\binom{3}{2}$ = 3

Pour k = 3, il y a 1 seul chemin réalisant 3 succès donc $\binom{3}{3}$ = 1

III) Loi binomiale

1) Propriété

Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire X qui prend pour valeurs le nombre de succès obtenus à pour loi de probabilité :

P($X = k$) = $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n , p)$

Justification :

Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli la variable qui compte les succès prend pour valeurs 0, 1, 2,…., n

Pour un entier k compris entre 0 et n, l'événement ($X = k$) est représenté dans l'arbre par les chemins qui comportent k succès et $n - k$ échecs, il y en a $\binom{n}{k}$

Chacun de ces chemins comporte k fois S et $n - k$ fois $\bar{S}$ et a donc pour probabilité :

$p^{nombre\ de\ S} \times (1-p)^{nombre\ de\ \bar{S}}$

Il en résulte que P($X = k$) = $\binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$

Exemples :

1) On considère l'expérience suivante : On lance 10 fois de suite un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire qui prend la valeur correspondant au nombre de fois où la face 1 apparaît.

- **a)** Quelle est la loi suivie par la variable X ?
- **b)** Quelle est la probabilité de l'événement X = 3 ?
- **c)** Quelle est la probabilité que la face 1 apparaisse au moins 1 fois ?

Solution :

a) Les lancers étant identiques et indépendants X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$ $\mathcal{B}(10\ ,\ \frac{1}{6})$

b) $P(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 120 \times \frac{5^7}{6^{10}} \approx 0{,}155$

c) L'événement « la face 1 apparaît au moins une fois » correspond à l'événement « $X \geq 1$ » qui a pour événement contraire « $X = 0$ »

Donc on a $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}838$

2) Deux joueurs Alain et Bernard s'affrontent dans un tournoi de tennis. Alain et Bernard jouent 9 matchs. La probabilité qu'Alain gagne un match est 0,6. Le vainqueur est celui qui gagne le plus de matchs. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de matchs gagnés par Bernard.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

b) Ecrire l'événement « Bernard gagne le tournoi » à l'aide de X puis calculer sa probabilité.

Solution :

a) Les matchs étant identiques et leurs résultats indépendants X suit une loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0{,}4$ $\mathcal{B}(9\ ,\ 0{,}4)$

b) Bernard gagne le tournoi s'il gagne au moins 5 matchs, donc si l'événement « $X \geq 5$ » est réalisé.

Or $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$

$P(X \geq 5) = \binom{9}{5} 0{,}4^5\, 0{,}6^4 + \binom{9}{6} 0{,}4^6\, 0{,}6^3 + \binom{9}{7} 0{,}4^7\, 0{,}6^2 + \binom{9}{8} 0{,}4^8\, 0{,}6^1 + \binom{9}{9} 0{,}4^9$

$P(X \geq 5) \approx 0{,}267$

2) Espérance, Ecart type

L'espérance de la variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p est E(X) = np et son écart type est σ(X) = $\sqrt{np(1-p)}$

Exemples :

Dans l'exemple 1) précédent

$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{6} \approx 1{,}67$ et $\sigma(X) = \sqrt{10 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \approx 1{,}18$

Dans l'exemple 2) précédent

$E(X) = 9 \times 0{,}4 = 3{,}6$ $\sigma(X) = \sqrt{9 \times 0{,}4 \times 0{,}6} = \sqrt{2{,}16} \approx 1{,}47$